Radicación – Operaciones con irracionales – Racionalización de denominadores

Recordando…

RADICACIÓN

Dado un número real **a** y un número entero positivo **n**, se llama raíz enésima de **a** a otro número real **x** tal que *x* elevado a *n* es igual a *a*.
Simbólicamente:

$$\forall\, a \in R\,,\ \forall\, n \in N\,;\ \ \sqrt[n]{a} = x \quad \Leftrightarrow \quad x^n = a$$

donde: ***n*** es el índice de la raíz ; ***x*** es la raíz enésima de *a*

a es el radicando ; $\sqrt{\ }$ es el signo radical.

Signos: para calcular el signo de toda raíz debemos pensar siempre en la operación contraria, la potenciación.
Ejemplos:

- $\sqrt[3]{8} = 2$ porque $2^3 = 8$
- $\sqrt[5]{-32} = -2$ porque $(-2)^5 = -32$
- $\sqrt{225} = \pm 15$ porque $(15)^2 = 225$ y $(-15)^2 = 225$
- $\sqrt[6]{64} = \pm 2$ porque $(2)^6 = 64$ y $(-2)^6 = 64$
- $\sqrt{-36}$ no tiene solución real, porque $6^2 = 36$ y $(-6)^2 = 36$

Ninguna raíz de índice par y radicando negativo tiene solución en R.
La radicación no es cerrada en R.

Por lo antedicho, podemos expresar la definición dada de la siguiente manera:

$$\forall\, a \in R\,,\ \forall\, n \in N\,;\ \ \sqrt[n]{a} = x \quad \Leftrightarrow \quad x^n = a$$

bajo la condición de que si **n** es par entonces **a** es mayor o igual a cero.

Para recordar: **Propiedades de la radicación**
$\forall\, a\,,\ \forall\, b\,,\ a,b \in R\,,\ \forall\, m\,,\forall\, n\,,\ m,n \in N\,,$ m y n pares $\Rightarrow a \geq 0$ y $b \geq 0$ valen las siguientes propiedades:

Raíz de raíz	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$ La raíz de otra raíz es otra raíz cuyo radicando es el mismo y cuyo índice es el producto de los índices dados.	$\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[3.2]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$ Porque: $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[3]{8} = 2$
Propiedad distributiva de la radicación respecto del producto	$\sqrt[m]{a.b} = \sqrt[m]{a}\,.\sqrt[m]{b}$ La radicación de un producto es igual al producto de las	$\sqrt[3]{27.8} = \sqrt[3]{27}\,.\sqrt[3]{8} = 3.2 = 6$ Porque: $\sqrt[3]{27.8} = \sqrt[3]{216} = 6$

	raíces de cada uno de los factores.	
Propiedad distributiva de la radicación respecto de la división	$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$ La radicación de un cociente (con denominador no nulo) es igual a la raíz del numerador dividida por la raíz del denominador.	$\sqrt{\frac{100}{4}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{4}} = \frac{10}{2} = 5$ Porque: $\sqrt{\frac{100}{4}} = \sqrt{25} = 5$
NO distributiva de la radicación respecto a la suma y a la resta	$\boxed{\sqrt[m]{a \pm b} \neq \sqrt[m]{a} \pm \sqrt[m]{b}}$	

$\sqrt[2]{64+36} \neq \sqrt{64} + \sqrt{36}$	$\sqrt[2]{25-9} \neq \sqrt{25} - \sqrt{9}$
$\sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10 \quad \sqrt{64} + \sqrt{36} = 8+6 = 14$	$\sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4 \quad \sqrt{25} - \sqrt{9} = 5-3 = 2$

Extracción de factores de una raíz	Se descomponen en factores el radical, se distribuye la raíz y se simplifica los factores cuyos exponentes sean múltiplos del índice.	$\sqrt{18} = \sqrt{3^2.2} = \sqrt{3^2}.\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$
Simplificación de exponentes e índices	La potenciación y la radicación por ser operaciones inversas. **Pueden simplificarse exponentes con índices cuando la base es positiva**. Se debe tener precaución cuando se trabaja con números negativos.	$\left(\sqrt[3]{8}\right)^6 = 8^2 = 64$ Porque: $\left(\sqrt[3]{8}\right)^6 = 2^6 = 64$ $\sqrt[2]{3^2} = 3$ Porque: $\sqrt[2]{3^2} = \sqrt{9} = 3$

Si el índice y el exponente del radicando son iguales:

- ⇨ **La raíz es igual a la base de la potencia cuando el exponente es impar.**
- ⇨ **La raíz es igual al valor absoluto de la base de la potencia cuando el exponente es par**

$$\boxed{\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & \text{si} \quad n \text{ es par} \\ a & \text{si} \quad n \text{ es impar} \end{cases}}$$

OPERACIONES CON RADICALES

Radicales semejantes: Son aquellos radicales que tienen el mismo índice y el mismo radicando.

Ejemplo: $7\sqrt{19}$ y $-5\sqrt{19}$ son radicales semejantes cuyos coeficientes son 7 y – 5.

Sumas algebraicas de radicales: La suma algebraica de radicales semejantes es otro radical semejante a los dados, cuyo coeficiente es la suma algebraica de los coeficientes de los radicales dados.

Ejemplo:

➲ $2\sqrt{11} - \sqrt{11} + 3\sqrt{11} = \sqrt{11}\,(2 - 1 + 3) = 4\sqrt{11}$

Aplicando propiedades, se reducen los radicales de una expresión dada a radicales semejantes para poder operar:

➲ Realizar la siguiente suma de radicales $\sqrt[3]{-216} + 8\sqrt[3]{40} =$

Resolución

	$\sqrt[3]{-216} + 8\sqrt[3]{40} =$
Factoreando los radicandos	$= -6 + 8\sqrt[3]{2^3 . 5} =$
Aplicando propiedad de la radicación	$= -6 + 8\sqrt[3]{2^3} . \sqrt[3]{5} =$
Aplicando propiedad de la radicación	$= -6 + 16\sqrt[3]{5}$

Cuando los radicales no se pueden reducir a radicales semejantes, la operación queda indicada.

RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES

Se llama racionalización de una expresión fraccionaria al procedimiento mediante el cual se logra que el denominador sea un número racional.

Se consideran los siguientes casos:

1) El denominador es un número que contiene un radical

a) El radical es de índice 2

➲ Ejemplo: $\dfrac{3}{\sqrt{7}}$

¿Por qué número multiplicamos $\sqrt{7}$ para obtener un número racional?

Si multiplicamos a $\sqrt{7}$ por $\sqrt{7}$ obtenemos:

$$\sqrt{7} . \sqrt{7} = \sqrt{7^2} = 7$$

Entonces multiplicamos al numerador y al denominador por $\sqrt{7}$, no se altera el cociente dado y el denominador queda racionalizado.

$$\frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}} = \frac{3\cdot\sqrt{7}}{7}$$

Denominador Irracional — *Denominador Racional*

b) El radical no es de índice 2

En este caso conviene multiplicar por otro radical del mismo índice que el del denominador, de tal modo que en el radical que se obtenga, todos los exponentes de las potencias del radicando sean múltiplo del índice.

Ejemplo:

➲ $\sqrt[5]{\dfrac{1}{4^3}}$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{4^3}} = \frac{\sqrt[5]{1}}{\sqrt[5]{4^3}} = \frac{1}{\sqrt[5]{4^3}}.\frac{\sqrt[5]{4^2}}{\sqrt[5]{4^2}} = \frac{\sqrt[5]{4^2}}{\sqrt[5]{4^5}} = \frac{\sqrt[5]{16}}{5}$$

➲ $\dfrac{p}{\sqrt[3]{a.p^6.c^8}}$

Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt[3]{a^2.c}$. El exponente de **b** no se modifica pues es múltiplo de 3.

$$\frac{p}{\sqrt[3]{a.p^6.c^8}} = \frac{p}{\sqrt[3]{a.p^6.c^8}}.\frac{\sqrt[3]{a^2\,c}}{\sqrt[3]{a^2\,c}} = \frac{p\,.\sqrt[3]{a^2\,c}}{\sqrt[3]{a^3\,p^6\,c^9}} = \frac{p\,\sqrt[3]{a^2\,c}}{a.p^2.c^3} = \frac{\sqrt[3]{a^2\,c}}{a.p.c^3}$$

2) El denominador es un binomio que contiene radicales cuadráticos

Ejemplos:

➲ $\dfrac{6}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ denominador irracional

Para obtener un número racional, multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{7}+\sqrt{3}$ (conjugado de $\sqrt{7}-\sqrt{3}$)

Utilizando el resultado: (a + b)·(a – b) = $a^2 - b^2$, obtenemos:

$$\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} = \frac{2\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{7-3} = \frac{\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{2}$$

denominador racional

➲ $\dfrac{1-\sqrt{11}}{1+\sqrt{11}}$ denominador irracional

$$\frac{1-\sqrt{11}}{1+\sqrt{11}}=\frac{1-\sqrt{11}}{1+\sqrt{11}}.\frac{1-\sqrt{11}}{1-\sqrt{11}}=\frac{\left(1-\sqrt{11}\right)^2}{1^2-\left(\sqrt{11}\right)^2}=\frac{1-2\sqrt{11}+\left(\sqrt{11}\right)^2}{1-11}=$$

$$=\frac{1-2\sqrt{11}+11}{-10}=\frac{12-2\sqrt{11}}{-10}=\frac{-6+\sqrt{11}}{5}$$ denominador racional

➲ Racionalice cada una de las siguientes expresiones fraccionarias:

1) $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}=$

2) $\frac{3}{5+\sqrt{3}}=$

3) $\frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{2}-2}=$

4) $\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=$

5) $\frac{2}{\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}}=$

6) $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6\sqrt{2}\left(3+\sqrt{3}\right)}=$

7) $\frac{y\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y^2}}=$

8) $\left(\frac{1+\sqrt[4]{8}}{2}\right).\sqrt[4]{8^{-1}}=$

9) $\frac{\sqrt{2-x}}{2-\sqrt{2+x}}=$