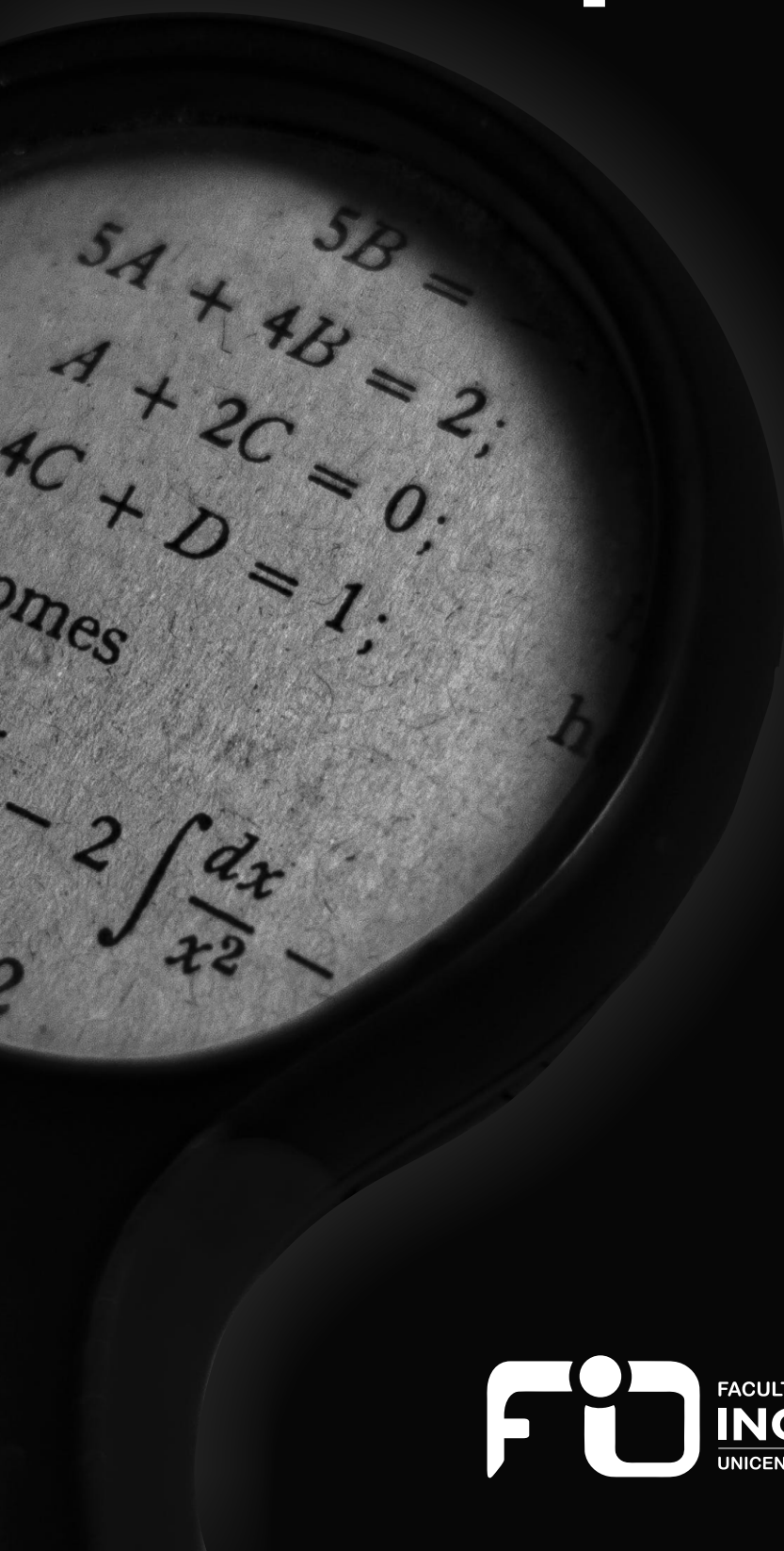


INTRODUCCIÓN A LAS CIENCIAS BÁSICAS

ESPACIO

Matemática Básica y sus Aplicaciones



FACULTAD DE
INGENIERÍA
UNICEN • OLAVARRÍA

MÓDULO 0

FACULTAD DE INGENIERÍA

**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CENTRO DE LA
PROVINCIA DE BUENOS AIRES**

Diseño y compilación: Mg. Ana Mabel Juárez y Dra. Estefanía Laplace
Facultad de Ingeniería. UNICEN

Colaboración: Esp. Mariano Ferreyro, Ing. Prof. Yésica Aispún.
Facultad de Ingeniería. UNICEN.

Elaboración de Trabajos Prácticos: Prof. Carolina Forte, Prof. Gabriela Guinder, Ing. Mariela Aranda, Prof. Alfredo Chang Tabarés, Prof. Valeria Lafuente, Prof. Florencia Luna Bazzano, Prof. Carolina Matos. Facultad de Ingeniería. UNICEN.

2025

1. Números reales.....	1
1.1. Introducción.....	1
1.2. La recta real	5
1.3. Valor absoluto.....	6
1.4. Operaciones elementales en $\mathbb{R}$. Propiedades	7
1.5. Potenciación.....	9
1.5.1. Notación científica	11
1.6. Radicación	12
1.6.1. Racionalización	15
1.7. Logaritmación.....	16
2. Expresiones algebraicas	20
2.1. Introducción.....	20
2.2. Ecuaciones lineales.....	21
2.3. Ecuaciones cuadráticas	24
2.4. Polinomios.....	29
2.4.1. Operaciones con polinomios	30
2.4.2. Raíces de un polinomio	36
2.4.3. Factorización de polinomios	39
3. Trabajo práctico.....	45
3.1. Números reales	45
3.2. Expresiones algebraicas.....	49
4. Respuestas	52
4.1. Números reales	52
4.2. Expresiones algebraicas.....	55
5. Bibliografía.....	56
6. ANEXO.....	57

1. Números reales

1.1. Introducción

Los números reales se emplean en todas las ramas de la Matemática y en el estudio de las Ciencias, por esta razón es importante estar familiarizados con los símbolos que los representan y manejar con fluidez las operaciones entre ellos y sus propiedades. En la página 56 se encuentra el [Anexo](#), donde se ha incluido una tabla con símbolos matemáticos que podría ser de utilidad para facilitar la lectura.

Los distintos tipos de números reales surgieron para cumplir con necesidades específicas referidas a actividades comerciales, de construcción, entre muchas otras.

Empezamos con los números naturales que surgen del proceso natural de contar y enumerar objetos.

Números naturales

Los números naturales son

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...

El conjunto de todos los números naturales se denota mediante el símbolo $\mathbb{N}$ y se cumple que:

- Tiene un primer elemento, el 1.
- No tiene último elemento.
- Todo número natural n tiene su sucesor o siguiente $n + 1$.
- La suma y el producto de números naturales da como resultado un número natural.

Números enteros

Los números enteros son los números naturales, sus correspondientes negativos (opuestos) y el cero

..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

El conjunto de todos los números enteros se denota mediante el símbolo $\mathbb{Z}$ y se cumple que:

- No tiene primer ni último elemento.
- Cada número tiene un antecesor y un sucesor.
- La suma, resta y multiplicación de números enteros da como resultado un número entero.

Números racionales

Los números racionales son aquellos que resultan de la razón o cociente entre dos números enteros con la condición que el denominador sea distinto de cero. En símbolos, un número racional se expresa como

$\frac{p}{q}$ con p, q enteros y $q \neq 0$

Si p y q son positivos, q indica el número de partes en que se partió la unidad y p el número de esos pedazos que se están tomando.

Algunos números racionales, también llamados números fraccionarios son,

$$\frac{1}{2}; \frac{4}{11}; \frac{-3}{5}; \frac{2}{4}; \frac{13}{6}; \frac{3}{2}; -\frac{20}{10}; \frac{1}{3}; \frac{10}{2}; \frac{5}{-25}$$



El denominador siempre es distinto de cero. Una división entre cero se excluye. Las expresiones como $\frac{2}{0}$ y $\frac{0}{0}$ no están definidas.



Al analizar el cociente que resulta de efectuar la división entre el numerador y el denominador se tiene que: todo número racional admite una representación decimal finita como $\frac{1}{2} = 0.5$ o infinita periódica como $\frac{4}{11} = 0.363636 \dots = 0.\overline{36}$ o como $\frac{7}{12} = 0.58333333 = 0.58\overline{3}$. El arco sobre el 36 o sobre 3 indica un bloque de dígitos que se repite llamado período.

Ejemplos

$$\begin{array}{llll} \frac{-3}{5} = -0.6 & \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5 & \frac{13}{6} = 2.1666 \dots = 2.1\overline{6} & \frac{10}{2} = \frac{5}{1} = 5 \\ \frac{3}{2} = 1.5 & -\frac{20}{10} = -2 & \frac{1}{3} = 0.\overline{3} & \frac{24}{9} = 2.666 \dots = 2.\overline{6} \end{array}$$

El conjunto de los números racionales se denota con $\mathbb{Q}$ y se cumple que:

- No tiene primer ni último elemento.
- La suma, resta y multiplicación de números racionales da como resultado un número racional.
- Entre dos números racionales distintos siempre hay otro número racional, por eso se dice que $\mathbb{Q}$ es un conjunto denso.

Como consecuencia de esto, no puede hablarse de números racionales consecutivos.

Por ejemplo, entre $\frac{9}{10}$ y 1 podemos ubicar el $\frac{19}{20}$ ya que $\frac{9}{10} < \frac{19}{20} < 1$; y entre 3.999 y 4 se encuentra 3.9999 ya que $3.999 < 3.9999 < 4$. De esta afirmación se deduce que entre dos números racionales hay infinitos números racionales.

Porcentaje

Los fraccionarios o decimales algunas veces se expresan como *porcentajes*; por ejemplo, 8% quiere decir $\frac{8}{100}$ ó 0.08. En general $b\%$ significa “ b partes de 100” y es simplemente otra forma de escribir $\frac{b}{100}$. Por ejemplo, 42% significa $\frac{42}{100}$, entonces, $42\% = 0.42$.

Una forma sencilla de convertir un número decimal en porcentaje es multiplicar el decimal por 1 escrito en forma de 100%.

Ejemplo

El número decimal 0.35 puede escribirse en forma porcentual de la siguiente manera:

$$0.35 = 0.35 \times 1 = 0.35 \times 100\% = 35\%$$

El porcentaje siempre se relaciona con otra cantidad para calcular la proporción de una cosa en relación a otra. Es importante especificar la cantidad de referencia cuando se menciona un porcentaje, por ejemplo, no se puede simplemente decir "45%" sin indicar la cantidad de la cual se está tomando el porcentaje. Lo correcto, por ejemplo, es calcular el 20% de 6800 o el 5% de 100.

Ejemplo

¿Cuál es el precio de oferta de una pelota de vóley si el precio lista es \$2860 y se ofrece un descuento del 25%?

Primero calculamos el 25% de \$2860

$$\frac{25}{100} \cdot \$2860 = \$715$$

Entonces el precio de la pelota de vóley será $\$2860 - \$715 = \$2145$.

Otra forma puede ser calcular el 75% del precio normal, ya que se está ofreciendo un descuento del 25% (al total que es el 100% le restamos el 25% de descuento, nos da el 75% que corresponde a la parte del precio que vamos a pagar finalmente).

Calculamos el precio de oferta de la pelota haciendo el 75% de \$2860

$$\frac{75}{100} \cdot \$2860 = \$2145$$



Los *porcentajes* se utilizan con frecuencia para describir los incrementos o reducciones en cantidades como población, salarios y precios.

Cuando una cantidad aumenta, el *porcentaje de incremento* se da por

$$\frac{\text{cantidad de aumento}}{\text{cantidad total}} \times 100\%$$

Cuando una cantidad disminuye, el *porcentaje de decrecimiento* se da por

$$\frac{\text{cantidad de decrecimiento}}{\text{cantidad total}} \times 100\%$$

Ejemplos

1) La población de un pequeño pueblo disminuyó de 1750 a 1700 habitantes. ¿Cuál es el porcentaje de decrecimiento?

La cantidad de decrecimiento es $1750 - 1700 = 50$ y la cantidad original es 1750. Entonces,

$$\frac{50}{1750} \times 100\% \approx 2.86\%$$

El porcentaje de decrecimiento es de aproximadamente 2.86%.

(Se utilizó el símbolo $\approx$ en lugar de $=$ para indicar que el número es sólo una aproximación).

2) El salario por hora de trabajo de un estudiante se elevó de 5.25 dólares a 5.75. ¿Cuál es el porcentaje de incremento?

El monto de incremento es 0.5 dólares y la cantidad original es de 5.25 dólares. Entonces,

$$\frac{0.5}{5.25} \times 100\% \approx 9.52\%$$

El porcentaje de aumento es de aproximadamente 9.52%.

Números irracionales

Los números irracionales son aquellos que no pueden ser expresados como cociente de dos números enteros. En otras palabras, los números que no son racionales son irracionales.

El conjunto de los números irracionales se denota mediante el símbolo $\mathbb{I}$.

Algunos números irracionales son

$$\sqrt{2}; \quad \pi; \quad e; \quad \sqrt[3]{2}; \quad \sqrt{3}$$

La expresión decimal de un número irracional no es finita ni periódica.

Ejemplos

$$\sqrt{2} = 1,414213562373095 \dots$$

$$\pi = 3,141592653589793 \dots$$

Si en cualquiera de estos números irracionales se interrumpe su expansión decimal en un cierto lugar, se tiene una aproximación del número y se usa el símbolo $\approx$ (se lee “aproximadamente igual”). Así:

$$\sqrt{2} \approx 1,4142$$

$$\pi \approx 3,14159265$$

Números reales

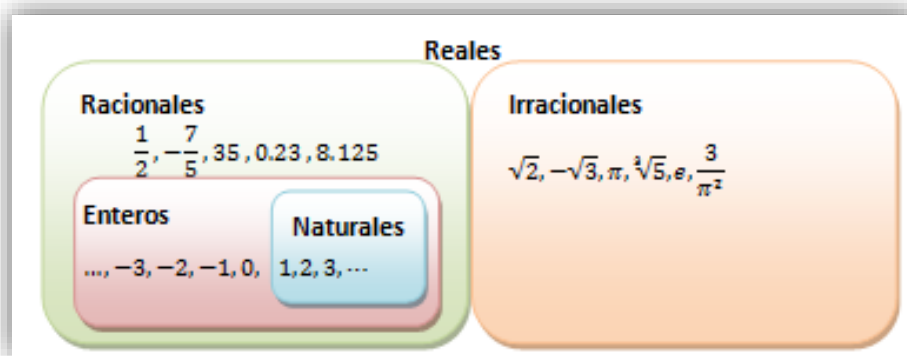
Los números racionales e irracionales forman el conjunto de los números reales y se denota mediante el símbolo $\mathbb{R}$.



- En el conjunto de números reales también se cumple que entre dos números reales siempre hay otro número real. Por ejemplo, entre 1,41 y $\sqrt{2}$ podemos ubicar al 1,41411 ya que $1,41 < 1,41411 < \sqrt{2}$.

- Es importante destacar que en el conjunto de los números reales no puede hablarse de números reales consecutivos.

La siguiente figura muestra la relación entre los distintos tipos de *números reales*.



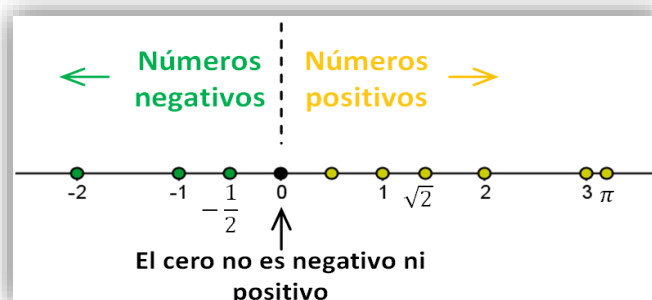
1.2. La recta real

Los números reales y los puntos de una recta pueden hacerse corresponder *uno a uno* para formar una recta de números reales. Por lo tanto, pueden representarse a los números reales como puntos de una recta horizontal llamada recta numérica.

El punto que se escoja para representar al número 0 se llama origen.

La dirección a la derecha del 0 se llama dirección positiva en la recta numérica. La dirección hacia la izquierda del 0 es la dirección negativa.

Los números reales positivos se representan a la derecha del cero y los negativos a la izquierda.



El conjunto de los números reales está *ordenado*. Esto significa que se pueden comparar dos cualesquiera números reales que no sean iguales mediante desigualdades y decir que uno “es menor que” o “mayor que” el otro.

Sean a y b dos números reales cualesquiera

Orden de los números reales		
Símbolo	Definición	Se lee
$a > b$	$a - b$ es positivo	a es mayor que b
$a < b$	$a - b$ es negativo	a es menor que b
$a \geq b$	$a - b$ es positivo o cero	a es mayor o igual que b
$a \leq b$	$a - b$ es negativo o cero	a es menor o igual que b
Los símbolos $>$, $<$, $\geq$, $\leq$ son <i>símbolos de desigualdades</i> .		

Las expresiones como $a > b$, $a \geq b$, $a < b$ o $a \leq b$ se llaman *desigualdades*.

En forma geométrica, $a > b$ significa que a se encuentra a la derecha de b , o bien que b se encuentra a la izquierda de a , en la recta numérica.

Ejemplos

En la figura anterior se observa que:

$$1 > -1, \quad \sqrt{2} < 2, \quad 0 > -2, \quad 3 < \pi$$

Hemos iniciado esta unidad repasando los conjuntos numéricos sin tratar previamente el concepto de conjunto, el cual es fundamental en todas las ramas de la matemática. La teoría elemental de conjuntos se enfoca en estudiar sus características y las relaciones que pueden efectuarse entre ellos.

1.3. Valor absoluto

El valor absoluto de un número real, denotado por $|a|$, es la distancia de a a 0 (origen) en la recta numérica. La distancia siempre es positiva o cero, de modo que $|a| \geq 0$ para todo número real a .

Dado un número real a , definimos el valor absoluto de a de la siguiente manera

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$



Observemos que si a es negativo, $-a$ (opuesto de a) resulta positivo.

Ejemplos

$$|7| = 7, \quad |-7| = -(-7) = 7, \quad |0| = 0, \quad \left|\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}, \quad |-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$$

Observemos que la distancia de 7 a 0 es igual que de -7 a 0, por lo que $|7| = |-7| = 7$

Propiedades

Sean a y b dos números reales cualesquiera

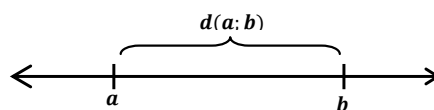
	Propiedad	Ejemplo	Descripción
1.	$ a \geq 0$	$ -5 = 5 \geq 0$	El valor absoluto de un número siempre es positivo o cero.
2.	$ -a = a $	$ -5 = 5 = 5$	Un número y su opuesto tienen el mismo valor absoluto.

3.	$ a \cdot b = a \cdot b $	$ -3 \cdot 7 = -3 \cdot 7 $	El valor absoluto de un producto es igual al producto de los valores absolutos.
4.	$\left \frac{a}{b}\right = \frac{ a }{ b }, b \neq 0$	$\left \frac{15}{-3}\right = \frac{ 15 }{ -3 }$	El valor absoluto de un cociente es igual al cociente de los valores absolutos.

Distancia entre dos números

Si a y b son dos números reales cualesquiera, la *distancia* entre ellos es

$$d(a; b) = |a - b|$$



Usando propiedades del valor absoluto

$$|b - a| = |(-1)(a - b)| = |-1| |a - b| = |a - b|$$

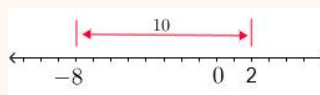
Se tiene entonces que $d(a; b) = d(b; a)$

Ejemplos

$$1) d(7, 3) = |7 - 3| = |4| = 4 \quad \text{porque} \quad 7 - 3 > 0$$

$$d(3, 7) = |3 - 7| = -(3 - 7) = 7 - 3 = 4 \quad \text{porque} \quad 3 - 7 < 0$$

$$2) d(-8, 2) = |-8 - 2| = |-10| = 10, \quad d(2, -8) = |2 - (-8)| = |2 + 8| = 10$$



$$3) d(0, -4) = |0 - (-4)| = 4$$

1.4. Operaciones elementales en $\mathbb{R}$. Propiedades

Las operaciones básicas con números reales (suma, resta, multiplicación y división) cumplen con ciertas propiedades que se deben tener presentes para operar correctamente con ellos. Algunas de ellas se resumen a continuación:

Sean a, b, c números reales cualesquiera

		Propiedad	Ejemplo
1.	Conmutativa	$a + b = b + a$ $a \cdot b = b \cdot a$	$9 + 5 = 5 + 9$ $3 \cdot 7 = 7 \cdot 3$

2.	Asociativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	$(2 + 4) + 1 = 2 + (4 + 1)$ $(2 \cdot 5) \cdot 3 = 2 \cdot (5 \cdot 3)$
3.	Elemento neutro	$a + 0 = a$ (aditivo) $a \cdot 1 = a$ (multiplicativo)	$3 + 0 = 3$ $9 \cdot 1 = 9$
4.	Elemento opuesto Elemento inverso	$a + (-a) = 0$ $a \cdot a^{-1} = 1, a \neq 0$	$5 + (-5) = 0$ $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$
5.	Distributiva de la multiplicación sobre suma o resta	$c \cdot (a \pm b) = c \cdot a \pm c \cdot b$ $(a \pm b) \cdot c = a \cdot c \pm b \cdot c$	$2 \cdot (1 \pm 6) = 2 \cdot 1 \pm 2 \cdot 6$ $(1 \pm 6) \cdot 2 = 1 \cdot 2 \pm 6 \cdot 2$
6.	Distributiva del cociente sobre suma o resta.	$\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}$	$\frac{8 \pm 5}{2} = \frac{8}{2} \pm \frac{5}{2}$



Una particularidad del elemento neutro de la suma es que $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ se verifica para cualquier número real a .

Más aún, el producto de números reales es nulo si y sólo si uno de ellos es nulo.

En símbolos: $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ó $b = 0$



Cuando la suma o la resta está en el denominador, *no* se cumple la propiedad distributiva

$$\frac{a}{b \pm c} \neq \frac{a}{b} \pm \frac{a}{c}, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0$$

El producto $a \cdot (b \cdot c)$ *no* es distributivo, $a \cdot (b \cdot c) \neq (a \cdot b) \cdot (a \cdot c)$



Al trabajar con fracciones es muy útil tener en cuenta la siguiente propiedad que permite, por ejemplo, simplificar fracciones:

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0$$

Algunas propiedades del inverso aditivo se dan a continuación:

	Propiedades del opuesto o inverso aditivo	Ejemplo
1.	$(-1) \cdot a = -a$	$(-1) \cdot 6 = -6$
2.	$-(-a) = a$	$-(-2) = 2$
3.	$(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = a \cdot (-b)$	$(-3) \cdot 2 = -(3 \cdot 2) = 3 \cdot (-2) = -6$
4.	$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$	$(-5) \cdot (-7) = 5 \cdot 7 = 35$

5.	$-(a + b) = -a - b$	$-(2 + 6) = -2 - 6 = -8$
6.	$-(a - b) = b - a$	$-(7 - 9) = 9 - 7 = 2$

De estas propiedades se deduce la conocida *regla de los signos*:

$$+ \cdot + = +$$

$$- \cdot + = -$$

$$+ \cdot - = -$$

$$- \cdot - = +$$

1.5. Potenciación

Potencias naturales de números reales

Si a es un número real y n un número natural, entonces la n -ésima potencia de a es

$$a^n = a \cdot a \cdots a \text{ (n factores)}$$

El número a se denomina base y n es el exponente. a^n se lee “ a elevado a la n ”.

Ejemplos

$$(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^5 = \left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{3}{7}\right) = \frac{243}{16807}$$

$$(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 81$$

$$-3^4 = -(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = -81$$

Propiedades

Sean a, b números reales cualquiera y m, n números naturales

	Propiedad	Ejemplo
1.	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$3^4 \cdot 3^2 = 3^{4+2} = 3^6$
2.	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0$	$\frac{5^4}{5^2} = 5^{4-2} = 5^2$
3.	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$\left(\frac{3}{5} \cdot 9\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot 9^2$
4.	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$(5^2)^3 = 5^{2 \cdot 3} = 5^6$
5.	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$	$\left(\frac{3}{7}\right)^3 = \frac{3^3}{7^3}$

Para extender la definición de potencia natural de un número real a potencia de exponente entero, damos la siguiente definición:



Si $a \neq 0$ es un número real y n es un número natural, entonces

$$a^0 = 1 \quad \text{y} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

De esta manera, si $a \neq 0$, la potencia a^n queda definida $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Así las propiedades enunciadas anteriormente valen en caso de m, n números enteros. Además, se tienen otras propiedades:

	Propiedad	Ejemplo
6.	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, a \neq 0, b \neq 0$	$\left(\frac{3}{7}\right)^{-3} = \left(\frac{7}{3}\right)^3 = \frac{7^3}{3^3}; \left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{3^3}{2^3}$
7.	$\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}, a \neq 0, b \neq 0$	$\frac{3^{-2}}{5^{-3}} = \frac{5^3}{3^2}$



No se cumple la propiedad distributiva cuando la base de una potencia es suma o resta.

$$(a + b)^n \neq a^n + b^n \quad \text{y} \quad (a - b)^n \neq a^n - b^n$$

Para mostrar que no se cumple una propiedad basta con usar un caso concreto, en matemática se llama contraejemplo.

$$(1 + 2)^2 = 3^2 = 9 \quad \text{mientras que} \quad 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$$

$$(7 - 3)^2 = 4^2 = 16 \quad \text{mientras que} \quad 7^2 - 3^2 = 49 - 9 = 40$$



El cuadrado de un binomio se obtiene de la siguiente manera:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ejemplos

1) Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (x es un número real, $x \neq 0$, m y n son números enteros).

a) $x^0 = 1$

b) $\frac{x^n}{x^m} = x^{\frac{n}{m}}$

a) Verdadera. Se justifica haciendo referencia a la propiedad: $a^0 = 1$ con $a \neq 0$.

b) Falsa. Cuando queremos justificar que una afirmación es falsa, se debe mostrar un caso concreto donde la afirmación no se cumple (contraejemplo):

$$\text{si } x = 5, n = 3, m = 1 \text{ entonces } \frac{x^n}{x^m} = \frac{5^3}{5^1} = \frac{125}{5} = 25$$

$$\text{mientras que } x^{\frac{n}{m}} = 5^{\frac{3}{1}} = 5^3 = 125$$

Se concluye que $\frac{x^n}{x^m} \neq x^{\frac{m}{n}}$ porque para que la afirmación sea verdadera, tiene que cumplirse para todos los valores de x, m y n .

2) Aplicar las propiedades de la potencia para simplificar la expresión $\left(\frac{x}{y}\right)^4 \cdot \left(\frac{x \cdot y^3}{z}\right)^3$ siendo $y \neq 0, z \neq 0$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{y}\right)^4 \cdot \left(\frac{x \cdot y^3}{z}\right)^3 &= \frac{x^4}{y^4} \cdot \frac{x^3 \cdot (y^3)^3}{z^3} \\ &= \frac{x^4}{y^4} \cdot \frac{x^3 \cdot y^9}{z^3} \\ &= (x^4 \cdot x^3) \cdot \left(\frac{y^9}{y^4}\right) \frac{1}{z^3} \\ &= \frac{x^7 \cdot y^5}{z^3} \end{aligned}$$

Luego de recordar las propiedades de la potencia, resulta oportuno aprender a escribir números muy grandes y números muy pequeños de manera conveniente para luego operar con ellos.

1.5.1. Notación científica

Se dice que un número positivo x está escrito en notación científica si está expresado como

$$x = c \times 10^n \quad \text{donde} \quad 1 \leq c < 10 \quad \text{y} \quad n \text{ es un entero}$$

Ejemplos

1) $93\,000\,000 = 9.3 \times 10^7$

El exponente positivo 7 indica que la coma decimal debe pasarse 7 lugares hacia la derecha.

2) $0.000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,053 = 5.3 \times 10^{-23}$

El exponente negativo -23 indica que la coma decimal debe pasarse 23 lugares hacia la izquierda.

3) Convertir a notación científica y viceversa, según corresponda

$$2.375 \times 10^8 = 237\,500\,000$$

$$0.000000349 = 3.49 \times 10^{-7}$$

4) Usando notación científica, simplificar $((370\,000)(4\,500\,000\,000))/18\,000$

$$\begin{aligned} \frac{(370\,000)(4\,500\,000\,000)}{18\,000} &= \frac{(3.7 \times 10^5)(4.5 \times 10^9)}{1.8 \times 10^4} = \frac{(3.7)(4.5)}{1.8} \times 10^{5+9-4} \\ &= 9.25 \times 10^{10} \end{aligned}$$

Usando la calculadora, se puede visualizar en la pantalla el resultado obtenido en notación científica. Se introducen los números en forma decimal y la calculadora muestra el resultado en notación científica. Utiliza “9.25E10” para indicar 9.25×10^{10} .

$$\frac{(370\,000)(4\,500\,000\,000)}{18\,000} = 9.25E10$$

1.6. Radicación

Si a es un número real positivo entonces la raíz cuadrada de a , que se escribe $\sqrt{a}$, es el número real positivo b que cumple $b^2 = a$.

Es decir:

$$\sqrt{a} = b \quad \text{si y solo si} \quad b^2 = a \quad \text{y} \quad b \geq 0$$

El símbolo $\sqrt{}$ que se utiliza para denotar la raíz cuadrada se llama *radical*. El número bajo el radical se denomina *radicando*. Cuando se refiere a ambos, el radical y el radicando, se dice *expresión radical*.

La raíz cúbica, en cambio, está definida para cualquier número real.

Si a es número real

$$\sqrt[3]{a} = b \quad \text{si y solo si} \quad b^3 = a$$

En general,

Si n es un entero positivo entonces la raíz n -ésima principal de a se define como:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{si y solo si} \quad b^n = a$$



Si n es par, la raíz sólo está definida para números positivos, es decir: $a \geq 0$ y $b \geq 0$.

Si n es impar, la raíz está definida $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

Ejemplos

$$\sqrt{9} = 3 \quad \text{porque} \quad 3^2 = 9 \quad \text{y} \quad 3 \geq 0$$

$$\sqrt[3]{-1} = -1 \quad \text{porque} \quad (-1)^3 = -1$$

$$\sqrt[4]{16} = 2 \quad \text{porque} \quad 2^4 = 16 \quad \text{y} \quad 2 \geq 0$$

$$\sqrt[3]{64} = 4 \quad \text{porque} \quad 4^3 = 64$$

$$\text{Observe que } \sqrt{3^2} = 3 \quad \text{y por otra parte} \quad \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = |-3|$$

Entonces $\sqrt{a^2} = a$ se cumple sólo si $a \geq 0$.

Pero podemos escribir siempre $\sqrt{a^2} = |a|$, para cualquier raíz de índice par.

Propiedades

Sean a, b números reales y m, n números naturales. (Supondremos que todas las operaciones que aparecen pueden realizarse).

	Propiedad	Ejemplo
1.	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{64 \cdot (-8)} = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{-8} = 4 \cdot (-2) = -8$
2.	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0$	$\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{2}{3} ; \quad \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
3.	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$	$\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$
4.	$\sqrt[n]{a^n} = a, n \text{ es impar}$	$\sqrt[3]{(-4)^3} = -4$
5.	$\sqrt[n]{a^n} = a , n \text{ es par}$	$\sqrt[4]{(-3)^4} = -3 = 3 ; \quad \sqrt[4]{4^4} = 4 = 4$

Ejemplos

Usando propiedades, extraer factores fuera del símbolo radical, siendo $x > 0$.

$$\text{a) } \sqrt{500} = \sqrt{100 \cdot 5} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{5} = 10\sqrt{5} \quad \text{b) } \sqrt[4]{x^5} = \sqrt[4]{x^4 \cdot x} = \sqrt[4]{x^4} \cdot \sqrt[4]{x} = x \sqrt[4]{x}$$

$$\text{c) } \sqrt[3]{24 \cdot x^5 \cdot y^4} = \sqrt[3]{3 \cdot 2^3 \cdot x^3 \cdot x^2 \cdot y^3 \cdot y} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{y^3} \cdot \sqrt[3]{y} = 2xy \sqrt[3]{3x^2y}$$

$$\text{d) } \frac{\sqrt{48x^3}}{\sqrt{6x}} = \sqrt{\frac{48x^3}{6x}} = \sqrt{8x^2} = \sqrt{2 \cdot 2^2 \cdot x^2} = 2x\sqrt{2}$$

Exponentes racionales

Según la definición de raíz n -ésima se tiene

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

En general, para cualquier racional $r = \frac{m}{n}$, m y n enteros, $n > 0$ definimos

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{1}{n} \cdot m} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$



Si n es par, se requiere la condición $a \geq 0$.

Con esta definición, se puede comprobar que se cumplen todas las propiedades de la potencia enunciadas anteriormente.

Ejemplos

1) Calcular:

$$9^{1.5} = 9^{\frac{3}{2}} = (9^{\frac{1}{2}})^3 = (\sqrt{9})^3 = 3^3 = 27$$

$$\text{b) } \left(\frac{1}{4}\right)^{0.5} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

2) Usando propiedades, escribir en forma de una sola potencia de exponente racional (x e y son positivos):

$$x \cdot \frac{\sqrt[3]{2 \cdot x^2 \cdot y^3}}{\sqrt{4 \cdot x \cdot y^6}} = x \cdot \frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{3}{3}}}{2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{6}{2}}} = 2^{\frac{1}{3}-1} \cdot x^{1+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}} \cdot y^{1-3} = 2^{-\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{7}{6}} \cdot y^{-2}$$

Suma y resta de raíces

Se pueden combinar dos o más raíces aplicando la propiedad distributiva si tienen el mismo radicando. Tales radicales se conocen como *radicales semejantes*.

Ejemplos

Calcular:

$$\text{a) } 7\sqrt{11} + 6\sqrt{11} = (7 + 6)\sqrt{11} = 13\sqrt{11}$$

$$\text{b) } 7\sqrt{2} - 5\sqrt{8} = 7\sqrt{2} - 5 \cdot \sqrt{2 \cdot 2^2} = 7\sqrt{2} - 5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2^2} = 7\sqrt{2} - 5 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = -3\sqrt{2}$$

$$\text{c) } \sqrt{5x} - 7\sqrt{5x} = -6\sqrt{5x}$$

$$\text{d) } 5^3\sqrt[3]{16} - 11^3\sqrt[3]{2} = 5^3\sqrt[3]{2^3 \cdot 2} - 11^3\sqrt[3]{2} = 10^3\sqrt[3]{2} - 11^3\sqrt[3]{2} = -^3\sqrt[3]{2}$$

Producto y cociente de raíces

Para multiplicar o dividir radicales, se aplica la propiedad distributiva de la radicación con respecto al producto o cociente.

Ejemplos

Calcular:

$$\text{a) } \sqrt{7} \cdot \sqrt{7^3} = \sqrt{7 \cdot 7^3} = \sqrt{7^4} = 7^2 = 49$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = 2^{\frac{2}{6}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$$

$$\text{c) } \frac{\sqrt[3]{5^5}}{\sqrt[3]{5^2}} = \sqrt[3]{\frac{5^5}{5^2}} = \sqrt[3]{5^3} = 5$$

$$d) (6\sqrt{2} + 2) \cdot (3 - 2\sqrt{2}) =$$

Aplicando distintas propiedades, vamos a calcular $(6\sqrt{2} + 2) \cdot (3 - 2\sqrt{2}) =$

$$\text{Propiedad distributiva} \quad 6\sqrt{2} \cdot 3 + 6\sqrt{2} \cdot (-2\sqrt{2}) + 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-2\sqrt{2}) =$$

$$\text{Propiedad conmutativa} \quad 6 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} - 6 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + 6 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} =$$

$$\text{Propiedad asociativa} \quad 18\sqrt{2} - 12\sqrt{4} + 6 - 4\sqrt{2} =$$

$$\text{Propiedad conmutativa} \quad 18\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - 12 \cdot 2 + 6 =$$

$$\text{Propiedad asociativa} \quad 14\sqrt{2} - 18$$

1.6.1. Racionalización

Es un procedimiento que implica la escritura de una expresión radical como otra equivalente, en la que no hay radicales en el denominador.

1) Si el denominador contiene la raíz cuadrada de un número natural que no sea cuadrado perfecto, hay que multiplicar el numerador y denominador por la raíz cuadrada del denominador. Al realizar este procedimiento, de multiplicar y dividir una expresión racional por un mismo número, la expresión no cambia (es una propiedad enunciada anteriormente).

Ejemplos

$$a) \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$b) \frac{15}{\sqrt{6}} = \frac{15}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{15 \cdot \sqrt{6}}{6} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$$

$$c) \frac{\sqrt{11} - 2}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{11} - 2) \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{11 \cdot 2} - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2 \cdot 2}} = \frac{\sqrt{22} - 2\sqrt{2}}{2}$$

2) Si el denominador contiene la raíz cúbica de un número natural la estrategia consiste en multiplicar el numerador y denominador por la raíz cúbica del denominador elevada al cuadrado, como se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo

$$\frac{2}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{(\sqrt[3]{5})^2}{(\sqrt[3]{5})^2} = \frac{2 \cdot (\sqrt[3]{5})^2}{(\sqrt[3]{5})^3} = \frac{(\sqrt[3]{5})^2}{5}$$

3) Si el denominador contiene dos términos, con al menos uno de ellos afectados por una raíz cuadrada, se debe multiplicar el numerador y denominador por el conjugado del denominador.

Ejemplos

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{7}{5 + \sqrt{3}} &= \frac{7}{5 + \sqrt{3}} \cdot \frac{5 - \sqrt{3}}{5 - \sqrt{3}} = \frac{7 \cdot (5 - \sqrt{3})}{5^2 + 5\sqrt{3} - 5\sqrt{3} - \sqrt{3}^2} = \frac{7 \cdot (5 - \sqrt{3})}{22} \\ \text{b) } \frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} &= \frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}\sqrt{3} - \sqrt{3}\sqrt{2} - \sqrt{3}^2} = -2(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

1.7. Logaritmación

Vimos que la radicación es una operación inversa de la potenciación, ya que

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{si y solo si} \quad b^n = a$$

La logaritmación también es una operación inversa de la potenciación. Esto se observa a partir de la definición de logaritmo de un número.

Logaritmo de un número

Si a es un número real positivo y b otro número real, $b > 0$ y $b \neq 1$, se llama logaritmo en base b de a al exponente que hay que elevar la base b para obtener el número a .

Es decir:

$$\log_b a = n \quad \text{si y solo si} \quad b^n = a$$

La expresión anterior se lee: n es el logaritmo en base b de a si y sólo si b elevado a la n es igual a a .



La expresión logarítmica $\log_b a = n$ y la expresión exponencial $b^n = a$ son equivalentes.

Esta conexión indica que un logaritmo es un exponente, por lo que podemos evaluar expresiones logarítmicas sencillas mediante nuestro conocimiento de los exponentes.

Ejemplos

Evaluar los siguientes logaritmos: $\log_{10} 1000$; $\log_2 32$; $\log_{27} 3$; $\log_{0.1} 10$; $\log_{10} 0.001$

$$\log_{10} 1000 = 3 \quad \text{porque} \quad 10^3 = 1000$$

$$\log_2 32 = 5 \quad \text{porque} \quad 2^5 = 32$$

$$\log_{27} 3 = \frac{1}{3} \quad \text{porque} \quad 27^{\frac{1}{3}} = 3$$

$$\log_{0.1} 10 = -1 \quad \text{porque} \quad 0.1^{-1} = 10$$

$$\log_{10} 0.001 = -3 \quad \text{porque} \quad 10^{-3} = 0.001$$

Propiedades de los logaritmos

Propiedades		
1.	$\log_b 1 = 0$	Se debe elevar b a la potencia 0 para obtener 1.
2.	$\log_b b = 1$	Se debe elevar b a la potencia 1 para obtener b .
3.	$\log_b b^n = n$	Se debe elevar b a la potencia n para obtener b^n .
4.	$b^{\log_b n} = n$	$\log_b n$ es la potencia a la cual se debe elevar b para obtener n .

Ejemplos

En cada caso usamos una de las propiedades anteriores:

$$\log_6 1 = 0 \quad \log_5 5 = 1 \quad \log_3 3^7 = 7 \quad 2^{\log_2 10} = 10$$

Logaritmos decimales y naturales

El logaritmo con base $b = 10$ se llama logaritmo en base 10 o *logaritmo decimal* y se denota omitiendo la base

$$\log a = \log_{10} a$$

El logaritmo con base $b = e$ se le llama *logaritmo natural* y se acostumbra escribir el logaritmo natural como

$$\log_e a = \ln a$$

Usando la definición de logaritmos se puede demostrar fácilmente que

Logaritmo decimal	Logaritmo natural
$\log 1 = 0$	$\ln 1 = 0$
$\log 10 = 1$	$\ln e = 1$
$\log 10^n = n$	$\ln e^n = n$
$10^{\log n} = n$	$e^{\ln n} = n$



Para calcular $\log 40$ o $\ln 3$ se recomienda usar los valores aproximados que brindan las calculadoras científicas que dan de manera directa los logaritmos.

Otras propiedades de los logaritmos

Los logaritmos tienen rasgos algebraicos especiales para los cálculos que aparecen en muchos problemas de aplicación.

Como los logaritmos son exponentes, las propiedades de los exponentes dan lugar a otras propiedades de logaritmos.

Sea b un número positivo, $b \neq 1$.

Sean A , B y C números reales cualesquier con $A > 0$ y $B > 0$.

Propiedades		
1.	$\log_b(A \cdot B) = \log_b A + \log_b B$	Logaritmo de un producto de números es la suma de los logaritmos de los números.
2.	$\log_b\left(\frac{A}{B}\right) = \log_b A - \log_b B$	Logaritmo de un cociente de números es la diferencia de los logaritmos de los números.
3.	$\log_b A^C = C \log_b A$	Logaritmo de una potencia de un número es el exponente por el logaritmo del número.

Ejemplos

1) Escribir cada expresión como un único logaritmo y determinar su valor.

a) $\log_2 80 - \log_2 5$; b) $\log_4 2 + \log_4 32$; c) $-\frac{1}{3} \log 8$; d) $\frac{1}{2} \ln 36 + 2 \ln 4 - \ln 4$

$$a) \log_2 80 - \log_2 5 = \log_2 \left(\frac{80}{5}\right) = \log_2 16 = 4$$

$$b) \log_4 2 + \log_4 32 = \log_4 (2 \cdot 32) = \log_4 64 = 3$$

$$c) -\frac{1}{3} \log 8 = \log 8^{\left(-\frac{1}{3}\right)} = \log \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \log \frac{1}{2} \approx -0.301$$

2) Usando propiedades evaluar las expresiones dadas.

a) $\ln \sqrt{e}$; b) $\ln 3e$; c) $\ln \frac{1}{e}$; d) $\log_3 \left(\frac{\sqrt{27}}{9}\right)^{-1}$

$$a) \ln \sqrt{e} = \ln e^{1/2} = \frac{1}{2} \ln e = \frac{1}{2}$$

$$b) \ln 3e = \ln 3 + \ln e = \ln 3 + 1 \approx 2.098$$

$$c) \ln \frac{1}{e} = \ln 1 - \ln e = 0 - 1 = -1$$

$$\begin{aligned} d) \log_3 \left(\frac{\sqrt{27}}{9}\right)^{-1} &= -1(\log_3 \sqrt{27} - \log_3 9) = -\log_3 27^{\frac{1}{2}} + \log_3 3^2 \\ &= -\frac{1}{2} \log_3 3^3 + 2 \log_3 3 = -\frac{3}{2} \log_3 3 + 2 \log_3 3 = -\frac{3}{2} + 2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3) Desarrollar o reducir a un único logaritmo, según corresponda, cada una de las siguientes expresiones.

a) $\log(3x^5y)$

b) $\ln x^5 - 3 \ln(xy)$

$$\text{a) } \log(3x^5y) = \log 3 + \log x^5 + \log y = \log 3 + 5 \log x + \log y$$

$$\text{b) } \ln x^5 - 3 \ln(xy) = \ln x^5 - \ln(xy)^3 = \ln\left(\frac{x^5}{x^3y^3}\right) = \ln \frac{x^2}{y^3}$$

Cambio de base

Al trabajar con una expresión logarítmica con una base no deseable, es posible transformarla en un cociente de logaritmos con una base diferente.

Ejemplo

Evaluar $\log_7 4$.

Como $\log_7 4$ es difícil evaluar ya que 7 no es una potencia sencilla de 4, hacemos $y = \log_7 4$,

$$\text{Por definición} \quad 4 = 7^y$$

$$\text{Aplicamos } \ln \text{ a ambos lados} \quad \ln 4 = \ln 7^y$$

$$\text{Por la regla de la potencia} \quad \ln 4 = y \cdot \ln 7$$

$$\text{Dividimos entre } \ln 4 \quad y = \frac{\ln 4}{\ln 7}$$

Generalizamos este procedimiento expresando la fórmula de *cambio de base para los logaritmos*.

Para números reales positivos a , b y x con $a \neq 1$ y $b \neq 1$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Con esta fórmula podemos evaluar un logaritmo para cualquier base, en términos de logaritmos decimales o logaritmos naturales y luego usar la calculadora.

Ejemplos

$$\text{a) } \log_3 16 = \frac{\ln 16}{\ln 3} \approx 2.53$$

$$\text{b) } \log_6 10 = \frac{\log 10}{\log 6} = \frac{1}{\log 6} \approx 1.29$$

2. Expresiones algebraicas

2.1. Introducción

Una *expresión algebraica* es una combinación de letras (variables) y números (constantes) ligadas entre sí por las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Ejemplos

$$3x + y - 2z \quad 5x^2 - 3x^{-1} + \frac{1}{2}\sqrt{y} \quad \frac{x}{2} + y - xy \quad x - z^{-2} - \frac{y}{x + y}$$

Ecuación

Una *ecuación* es una *igualdad* entre dos expresiones algebraicas.

Ejemplos

$$5x + 7 = 22 \quad 3x - 2y = x + y \quad x - 2y^2 = z$$

Una *ecuación en una sola variable* es una igualdad entre dos expresiones algebraicas en la que interviene sólo una variable y constantes.

Ejemplos

$$5x + 7 = 22 \quad x^2 - 9 = 0 \quad x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

La letra x es la variable y representa la *incógnita* de la ecuación que se pretende hallar. Los valores de x que hacen verdadera la ecuación se llaman *soluciones o raíces de la ecuación* y constituyen el *conjunto solución* que denotaremos S .

Ejemplos

1) Mostrar que $x = 3$ es una solución de la ecuación $5x + 7 = 22$.

Sustituimos la variable x por 3 en la ecuación

$$5 \cdot 3 + 7 = 22$$

$$15 + 7 = 22$$

$$22 = 22$$

Así se verifica que 3 es solución de la ecuación.

El conjunto solución de la ecuación es $S = \{3\}$.

2) El conjunto solución de la ecuación $x^2 - 9 = 0$ es $S = \{-3, 3\}$ porque los valores -3 y 3 hacen verdadera la ecuación.



Algunas ecuaciones se satisfacen para todos los valores de la variable. Estas ecuaciones reciben el nombre de *identidades*.

Ejemplo

La ecuación $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ es verdadera para todo valor real de la variable x . En este caso decimos que la ecuación es una identidad.

Resolución de ecuaciones

El proceso para determinar las soluciones de una ecuación se llama *resolución de una ecuación*. Para resolver ecuaciones usamos el concepto de *ecuaciones equivalentes*.

Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones con exactamente las mismas soluciones se llaman *ecuaciones equivalentes*.

Resolver una ecuación implica encontrar una ecuación más simple y equivalente a la dada, efectuando operaciones y aplicando propiedades, que pueda resolverse con facilidad.

Las propiedades estudiadas para los números reales también se cumplen para las variables y las expresiones algebraicas. Algunas de ellas son:

Sean A, B y C expresiones algebraicas y sea el símbolo $\Leftrightarrow$ que se lee “equivalente a” o “si y solo si”.

	Propiedades de la igualdad	Descripción
1.	Propiedad uniforme de la suma $A = B \Leftrightarrow A + C = B + C$	Sumando una expresión a ambos miembros de una ecuación, se obtiene una ecuación equivalente.
2.	Propiedad uniforme de la multiplicación $A = B \Leftrightarrow k \cdot A = k \cdot B, k \in R (k \neq 0)$	Multiplicando por un número distinto de cero a ambos miembros de una ecuación, se obtiene una ecuación equivalente.
3.	Propiedad del producto igual a cero $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ó } B = 0$	Un producto es igual a cero si y sólo si uno de los factores es cero.

2.2. Ecuaciones lineales

Una *ecuación lineal en una variable* es una ecuación equivalente a una de la forma:

$$ax + b = 0$$

donde a y b son números reales con $a \neq 0$ y x es la variable.

Ejemplos

$$2x - 4 = 0$$

$$1 + 3x = \frac{1}{2} - x$$

Resolución de ecuaciones lineales

Una *ecuación lineal* en una variable se resuelve transformándola a una *ecuación equivalente*, en la que los términos que tienen la variable x están en un miembro y todos los términos constantes están en el otro miembro.

Sea la ecuación lineal $ax + b = 0$

$$ax + b + (-b) = 0 + (-b)$$

Sumamos $-b$ a ambos miembros y simplificamos.

$$ax = -b$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)ax = \left(\frac{1}{a}\right)(-b)$$

Multiplicamos $\frac{1}{a}$ ($a \neq 0$) a ambos miembros y simplificamos, tenemos la única raíz de la ecuación.

$$x = \frac{-b}{a}$$

$$S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$$

Es el conjunto solución.

Ejemplos

Resolver las siguientes ecuaciones lineales:

1) $3x + 9 = 0$

$$3x + 9 + (-9) = 0 + (-9)$$

Sumamos (-9) a ambos miembros de la igualdad.

$$3x = -9$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)3x = \left(\frac{1}{3}\right)(-9)$$

Multiplicamos por $(1/3)$ y simplificamos.

$$x = \frac{-9}{3} = -3$$

Tenemos la única raíz de la ecuación.

$$S = \{-3\}$$

Conjunto solución.

2) $2(2x - 3) + 3(x + 1) = 5x + 2$

Aplicamos la propiedad distributiva.

$$4x - 6 + 3x + 3 = 5x + 2$$

Efectuamos las sumas posibles.

$$7x - 3 = 5x + 2$$

$$7x - 3 + 3 = 5x + 2 + 3$$

Sumamos 3 a ambos miembros de la igualdad.

$$7x = 5x + 5$$

$$7x + (-5x) = 5x + 5 + (-5x)$$

$$2x = 5$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) 2x = \left(\frac{1}{2}\right) 5$$

Multiplicamos por $(1/2)$ a ambos miembros y simplificamos.

$$x = \frac{5}{2}$$

Obtenemos el único valor para x .

$$S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$$

Conjunto solución.



Si al transformar una ecuación en otra ecuación equivalente, se obtiene una igualdad de la forma $0x + b = 0$, se concluye como sigue:

- Si $b = 0$, la igualdad es verdadera y se verifica para cualquier valor de x . Decimos, entonces, que la ecuación tiene infinitas soluciones y el conjunto solución está formado por todos los números reales y escribimos $S = \mathbb{R}$.
- Si $b \neq 0$, la igualdad no es verdadera y la ecuación no tiene solución. Decimos, entonces, que el conjunto solución es vacío y escribimos $S = \emptyset$.

Ejemplos

Resolver las siguientes ecuaciones:

1) $2(x - 1) = 2x - 2$

Aplicamos la propiedad distributiva.

$$2x - 2 = 2x - 2$$

$$2x - 2x = -2 + 2$$

$$0x = 0$$

Cualquier valor de x verifica esta ecuación.

$$S = \mathbb{R}$$

Tiene infinitas soluciones.

El conjunto solución es el conjunto de números reales

2) $10\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{5}\right) = 5x - \frac{1}{2}$

Aplicamos la propiedad distributiva.

$$5x - 2 = 5x - \frac{1}{2}$$

$$5x - 5x = -\frac{1}{2} + 2$$

$$0x = \frac{3}{2}$$

Ningún valor de x es solución de esta ecuación.

$$S = \emptyset$$

La ecuación no tiene solución.

El conjunto solución se expresa con el símbolo de conjunto vacío.

2.3. Ecuaciones cuadráticas

Una *ecuación cuadrática* en una variable es una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son números reales con $a \neq 0$.

Ejemplos

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \quad 2x^2 + 3 = 5x \quad x^2 = 4 \quad -x^2 = -6x \quad x(x + 1) = 3$$

Resolución de ecuaciones cuadráticas

A) Resolución de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + c = 0$.

$$ax^2 + c + (-c) = -c$$

Sumamos $(-c)$ a ambos miembros de la igualdad.

$$ax^2 = -c$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)ax^2 = \left(\frac{1}{a}\right)(-c)$$

Multiplicamos $\frac{1}{a}$ ($a \neq 0$) a ambos miembros y simplificamos.

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$$|x| = \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Aplicamos raíz cuadrada y nos queda una ecuación con valor absoluto, siendo $\left(-\frac{c}{a}\right) \geq 0$ para tener solución real.

$$x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \quad y \quad x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Las dos soluciones o raíces de la ecuación $ax^2 + c = 0$.

$$S = \left\{ -\sqrt{-\frac{c}{a}}, \sqrt{-\frac{c}{a}} \right\}$$

Conjunto solución contiene las dos raíces de la ecuación.

Ejemplos

Resolver las siguientes ecuaciones.

1) $3x^2 - 27 = 0$

$$3x^2 = 27$$

$$\frac{1}{3} \cdot 3x^2 = \frac{1}{3} \cdot 27$$

$$x^2 = 9$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$$

$$|x| = 3 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ó } x = -3$$

Las raíces de la ecuación son $x_1 = -3$ y $x_2 = 3$ y el conjunto solución es $S = \{-3, 3\}$.

$$2)(x - 2)^2 = 64$$

$$\sqrt{(x - 2)^2} = \sqrt{64}$$

$$|x - 2| = 8 \Leftrightarrow x - 2 = 8 \text{ ó } x - 2 = -8$$

$$x - 2 = 8 \Rightarrow x_1 = 10, \quad x - 2 = -8 \Rightarrow x_2 = -6$$

Las raíces son $x_1 = 10$ y $x_2 = -6$ y el conjunto solución es $S = \{-6, 10\}$.

3) $x^2 = -16$, esta ecuación no tiene solución en $\mathbb{R}$ y el conjunto solución es $S = \emptyset$.

B) Resolución de una ecuación cuadrática de la forma: $ax^2 + bx = 0$.

$$x(ax + b) = 0$$

Usando la propiedad distributiva escribimos como producto el primer miembro de la ecuación.

$$x = 0 \text{ ó } (ax + b) = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Por la *propiedad del producto igual a cero*, tenemos dos ecuaciones a resolver.

$$x_1 = 0 \text{ y } x_2 = -\frac{b}{a}$$

Son las raíces de la ecuación dada

$$ax^2 + bx = 0.$$

$$S = \left\{0, -\frac{b}{a}\right\}$$

Conjunto solución.

Ejemplo

Resolver la ecuación cuadrática $x^2 - 5x = 0$.

$$x(x - 5) = 0$$

$$x = 0 \text{ ó } x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$$

Las raíces de la ecuación son $x_1 = 0$ y $x_2 = 5$. El conjunto solución es $S = \{0, 5\}$

C) Resolución de una ecuación cuadrática de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$.

El procedimiento que se describe a continuación se conoce como *completar cuadrados* y permite resolver cualquier ecuación cuadrática usando propiedades.

Multiplicamos $\left(\frac{1}{a}\right)$ a ambos miembros de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Sumamos $\left(-\frac{c}{a}\right)$ a ambos miembros de la igualdad, nos queda

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Ahora, sumamos $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$ (que es el cuadrado de la mitad del coeficiente de término lineal) tenemos

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

El primer miembro puede escribirse como $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2a}\right) \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right) = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$

Usando esta expresión en el primer miembro y sumando los términos del segundo miembro, nos queda

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Aplicamos raíz cuadrada

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

En el primer miembro escribimos el valor absoluto de la expresión $\left(x + \frac{b}{2a}\right)$

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

de donde

$$\begin{aligned} x + \frac{b}{2a} &= \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\ x &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

La última igualdad representa una fórmula para obtener las soluciones de la ecuación cuadrática:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad y \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Finalmente, para resolver una ecuación cuadrática de la forma completa $ax^2 + bx + c = 0$ podemos usar directamente esta fórmula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplos

Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas.

1) $x^2 + 8x + 7 = 0$, donde $a = 1$, $b = 8$, $c = 7$

Usamos la fórmula $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2 \cdot 1} = \frac{-8 \pm 6}{2}$$

Las soluciones son $x_1 = -1$ y $x_2 = -7$; el conjunto solución es $S = \{-1, -7\}$.

2) $3x^2 + 6x + 3 = 0$, donde $a = 3$, $b = 6$, $c = 3$.

Usamos la fórmula $x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3}$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{6}$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm 0}{6}$$

$$x_1 = -1 \quad \text{y} \quad x_2 = -1$$

Conjunto solución es: $S = \{-1\}$

3) $x^2 + x = -1$

$$x^2 + x + 1 = 0, \text{ donde } a = 1, b = 1, c = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

No tiene solución
real

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2}$$

Conjunto solución es: $S = \emptyset$

El discriminante

Se llama *discriminante* de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ con ($a \neq 0$) a la expresión

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

El valor del discriminante de la ecuación cuadrática nos indica la cantidad de soluciones que tiene la ecuación en el conjunto de los números reales.

1. Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ entonces la ecuación tiene dos soluciones reales y distintas.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2. Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ entonces la ecuación tiene una única solución real (también podemos decir dos soluciones reales e iguales).

$$x = -\frac{b}{2a}$$

3. Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ entonces la ecuación no tiene solución real.

Ecuaciones bicuadráticas

Una ecuación de la forma

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \text{ donde } a, b, c \text{ son números reales y } a \neq 0$$

se dice bicuadrática si puede transformarse en una ecuación cuadrática realizando una sustitución conveniente.

Para resolver una ecuación de este tipo, hacemos el cambio de variable $u = x^2$. Elevamos al cuadrado a ambos miembros y nos queda $u^2 = x^4$.

Sustituimos en la ecuación original $ax^4 + bx^2 + c = 0$, tenemos $au^2 + bu + c = 0$ que es una ecuación cuadrática en la variable u .

Una vez resuelta esta ecuación, las soluciones obtenidas deben sustituirse en $x^2 = u$, para obtener las soluciones de la ecuación dada en x .

Ejemplo

Resolver la siguiente ecuación $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

Hacemos $x^2 = u$ y obtenemos la ecuación $u^2 - 10u + 9 = 0$

Resolviendo esta ecuación cuadrática, tenemos las soluciones

$$u = 9 \quad \text{y} \quad u = 1$$

Si $u = 9$ tenemos que resolver la ecuación $x^2 = 9$. Sus soluciones son $x_1 = 3$ y $x_2 = -3$.

Si $u = 1$, tenemos la ecuación $x^2 = 1$ cuyas soluciones son $x_3 = 1$ y $x_4 = -1$.

El conjunto solución de la ecuación $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ es $S = \{-3, -1, 1, 3\}$.

Ecuaciones polinómicas

Las ecuaciones polinómicas en la variable x son ecuaciones de la forma

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0 \quad \text{donde } a_0, a_1, a_2 \dots a_n \in \mathbb{R} \text{ y } n \in \mathbb{N}; x \text{ es la variable}$$

Ejemplos

$$1) 3 + 2x - 4x^2 = 0 \text{ donde } a_0 = 3, a_1 = 2 \text{ y } a_2 = -4$$

$$2) x^4 - 7x^2 + 3x = 0 \text{ donde } a_4 = 1, a_3 = 0, a_2 = -7, a_1 = 3 \text{ y } a_0 = 0$$

$$3) 3x + 1 = 0 \text{ donde } a_1 = 3 \text{ y } a_0 = 1$$

Los tipos más sencillos de ecuaciones polinómicas se obtienen para $n = 1$ y $n = 2$.

Para $n = 1$ tenemos la *ecuación lineal* o *ecuación de primer grado* y para $n = 2$ tenemos la *ecuación cuadrática* o *ecuación de segundo grado*. Para $n = 3, 4, \dots$ se tendrá una ecuación de grado tres, cuatro, etc.

Para resolver ecuaciones polinómicas $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$ con $n = 3, 4, \dots$, es decir $n > 2$, es necesario revisar el tema expresiones algebraicas enteras.

2.4. Polinomios

Un *polinomio* es una *expresión algebraica entera* donde la variable está afectada por *potencias enteras no negativas*.

Los polinomios con una única variable x son de la forma

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ son números reales y se llaman *coeficientes* del polinomio

a_n es el *coeficiente principal*

Si $a_n = 1$ decimos que el polinomio es *mónico*

a_0 el *término independiente*

n es un número entero positivo que indica el *grado del polinomio*

Ejemplos

$$P(x) = 2x^4 - 6x + 3$$

$$Q(x) = x^5 - \sqrt{2}x$$

$$W(x) = 4$$

Los polinomios se pueden clasificar según la cantidad de términos que lo conforman.

Polinomio de un solo término	$\Rightarrow$	Monomio
Polinomio de dos términos	$\Rightarrow$	Binomio
Polinomio de tres términos	$\Rightarrow$	Trinomio
Polinomio de cuatro términos	$\Rightarrow$	Cuatrinomio

Si el polinomio tiene k términos siendo $k \in \mathbb{N}$ y $k > 4$, simplemente decimos polinomio de k términos. Por lo tanto, un polinomio es una suma de monomios.

Ejemplos

$$P(x) = 2x^4 - 6x + 3$$

$$Q(x) = x^5 - \sqrt{2}x$$

$$W(x) = 4$$

- El grado de P es 4 y se expresa $gr(P) = 4$, su coeficiente principal es $a_4 = 2$ y su término independiente $a_0 = 3$.
- $gr(Q) = 5$, coeficiente principal $a_5 = 1$, *polinomio mónico*, término independiente $a_0 = 0$.

- $gr(W) = 0$, el coeficiente principal y el término independiente coinciden, son iguales a 4.



Todos los polinomios tienen asignado un grado, salvo el polinomio nulo:

$$T(x) = 0 \quad \text{no tiene grado.}$$

- Los *términos semejantes* son aquellos que tienen la misma variable afectada por el mismo exponente.
- Dos polinomios *son iguales* si y sólo si tienen el mismo grado y los coeficientes de los términos semejantes son iguales.
- Dos polinomios *son opuestos* si y sólo si tienen el mismo grado y los coeficientes de los términos semejantes son opuestos.
- Un polinomio está *ordenado* cuando los monomios que lo componen están escritos en forma creciente o decreciente según sus grados.

Ejemplos

$Q(x) = 15x^3 - 9x^2 + x^4$	$\Rightarrow$	Polinomio desordenado
$R(x) = 3x^2 - 2x + 2$	$\Rightarrow$	Polinomio ordenado en forma decreciente
$L(x) = x^5 + 6x^8$	$\Rightarrow$	Polinomio ordenado en forma creciente



Un polinomio está *completo* si contiene todos los monomios sucesivos de menor grado que él.

Ejemplos

$S(x) = x^7 + 3x^4 + \frac{2}{5}x - 1$	$\Rightarrow$	Polinomio incompleto
$S(x) = x^7 + 0x^6 + 0x^5 + 3x^4 + 0x^3 + 0x^2 + \frac{2}{5}x - 1$	$\Rightarrow$	Polinomio completo

2.4.1. Operaciones con polinomios

Suma y resta

La suma de dos polinomios da como resultado otro polinomio, el cual se obtiene de la suma de los coeficientes de términos o monomios semejantes.

Ejemplos

1) Sean $P(x) = 5x^4 - 3x^2 + x + \frac{1}{2}$ y $Q(x) = 6x^3 + 15x^2 - 3x + 2$, hallar $P(x) + Q(x)$.

$$P(x) + Q(x) = \left(5x^4 - 3x^2 + x + \frac{1}{2}\right) + (6x^3 + 15x^2 - 3x + 2)$$

$$\begin{aligned}
 &= 5x^4 + 6x^3 + (-3x^2 + 15x^2) + [x + (-3x)] + \left(\frac{1}{2} + 2\right) \\
 &= 5x^4 + 6x^3 + 12x^2 - 2x + \frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

2) Sean $R(x) = 2x^4 + 1$ y $S(x) = -2x^4 + x^2 + 1$, hallar $R(x) + S(x)$.

$$R(x) + S(x) = x^2 + 2 \quad \text{y} \quad gr(R + S) = 2$$



- Observemos que $gr(P + Q) = 4$, coincide con el mayor de los grados de los polinomios que intervienen en la operación.

- Al ser los polinomios del mismo grado y sus coeficientes principales opuestos, el grado del polinomio suma es menor que el grado de los polinomios sumandos.



Para generalizar diremos que el grado del polinomio $P + Q$ es menor o igual que el mayor de los grados entre $gr(P)$ y el $gr(Q)$. En símbolos

$$gr(P + Q) \leq \max \{gr(P), gr(Q)\}$$

La resta de dos polinomios se define como la suma entre el primer polinomio y el opuesto del segundo. En símbolos

$$P(x) - Q(x) = P(x) + (-Q(x))$$

Ejemplo

Sean $P(x) = 5x^4 - 3x^2 + x + \frac{1}{2}$ y $Q(x) = 6x^3 + 15x^2 - 3x + 2$, hallar $P(x) - Q(x)$

$$\begin{aligned}
 P(x) - Q(x) &= \left(5x^4 - 3x^2 + x + \frac{1}{2}\right) - (6x^3 + 15x^2 - 3x + 2) \\
 &= \left(5x^4 - 3x^2 + x + \frac{1}{2}\right) + [-(6x^3 + 15x^2 - 3x + 2)] \\
 &= \left(5x^4 - 3x^2 + x + \frac{1}{2}\right) + (-6x^3 - 15x^2 + 3x - 2) \\
 &= 5x^4 - 6x^3 + (-3x^2 + (-15x^2)) + (x + 3x) + \left(\frac{1}{2} + (-2)\right) \\
 &= 5x^4 - 6x^3 - 18x^2 + 4x - \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

Multiplicación de polinomios

La multiplicación de dos polinomios da como resultado un polinomio. El mismo se obtiene al multiplicar cada monomio del primer factor por cada uno de los monomios del segundo factor. Luego se efectúa la suma correspondiente.

Ejemplos

1) Dados $P(x) = 5x^2$ y $Q(x) = -\frac{1}{2}x^4$, hallar $P(x) \cdot Q(x)$

$$P(x) \cdot Q(x) = (5x^2) \cdot \left(-\frac{1}{2}x^4\right) = 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x^2 x^4 = -\frac{5}{2}x^6$$

Observemos que $gr(P \cdot Q) = 6$, igual a la suma de los grados de los monomios que participan en la operación.

2) Dados $P(x) = 5x^4 + x - \frac{1}{2}$ y $Q(x) = 6x^3 - 2x^2 + 2$, hallar $P(x) \cdot Q(x)$

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= \left(5x^4 + x - \frac{1}{2}\right) \cdot (6x^3 - 2x^2 + 2) \\ &= 5x^4(6x^3 - 2x^2 + 2) + x(6x^3 - 2x^2 + 2) \\ &\quad - \frac{1}{2}(6x^3 - 2x^2 + 2) \\ &= 30x^7 - 10x^6 + 10x^4 + 6x^4 - 2x^3 + 2x - 3x^3 + 1x^2 - 1 \\ &= 30x^7 - 10x^6 + 16x^4 - 5x^3 + x^2 + 2x - 1 \end{aligned}$$

En este caso $gr(P \cdot Q) = 7$.



Para generalizar diremos que el grado del polinomio resultante de la multiplicación $P(x) \cdot Q(x)$ es igual a la suma de los grados de dichos polinomios.

En símbolos

Si $gr(P) = n$ y $gr(Q) = m$ entonces $gr(P \cdot Q) = gr(P) + gr(Q) = n + m$

Algunos casos particulares

Sean A y B números reales o expresiones algebraicas, entonces

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

$$(A + B)(A + B) = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A - B)(A - B) = A^2 - 2AB + B^2$$

División de polinomios

Al igual que en el conjunto de los números enteros, para dividir polinomios se utiliza el *algoritmo de la división*.

Dados los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ es posible realizar la operación $P(x):Q(x)$ si $gr(P) \geq gr(Q)$, obteniendo un polinomio cociente y un polinomio resto.

$$\begin{array}{r|l} P(x) & Q(x) \\ \vdots & C(x) \\ R(x) & - \end{array}$$

$P(x)$: dividendo
 $Q(x)$: divisor
 $C(x)$: cociente
 $R(x)$: resto

Por el algoritmo de la división:

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$$



- Si $R(x) = 0$ entonces $P(x) = Q(x) \cdot C(x)$ y decimos que: “la división es exacta” ó “ $Q(x)$ divide a $P(x)$ ” ó “ $P(x)$ es divisible por $Q(x)$ ” ó “ $P(x)$ es múltiplo de $Q(x)$ ”.
- Si $R(x) \neq 0$ entonces $gr(R) < gr(Q)$

Ejemplos

1) Encontrar el cociente y resto de dividir:

$P(x) = 5x^4 - 3x^2 + x + 1$ por $Q(x) = x^2 - x - 2$. ¿Es $P(x)$ divisible por $Q(x)$?

Para realizar la división es necesario que $P(x)$ este completo y ordenado en forma decreciente, y $Q(x)$ ordenado en forma decreciente.

Realizamos la división siguiendo el procedimiento que muestra el ejemplo. En primer lugar, dividimos el monomio de mayor grado de $P(x)$ por el monomio de mayor grado de $Q(x)$:

$$5x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 1 \quad \begin{array}{r} x^2 - x - 2 \\ 5x^2 \end{array}$$

Cálculo auxiliar

$$\frac{5x^4}{x^2} = 5x^2$$

Multiplicamos $5x^2$ por $Q(x)$ y lo ubicamos debajo de $P(x)$

$$\begin{array}{r} 5x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 1 \\ 5x^4 - 5x^3 - 10x^2 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 - x - 2 \\ 5x^2 \end{array}$$

Restando

$$\begin{array}{r} 5x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 1 \\ - (5x^4 - 5x^3 - 10x^2) \\ \hline 5x^3 + 7x^2 + x + 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 - x - 2 \\ 5x^2 \end{array}$$

Repetimos el procedimiento con el polinomio resultado de la resta siempre que el grado de este polinomio sea mayor o igual al grado de $Q(x)$

$$\begin{array}{r} 5x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 1 \\ - (5x^4 - 5x^3 - 10x^2) \\ \hline 5x^3 + 7x^2 + x + 1 \\ - (5x^3 - 5x^2 - 10x) \\ \hline 12x^2 + 11x + 1 \\ - (12x^2 - 12x - 24) \\ \hline 23x + 25 = R(x) \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 - x - 2 \\ 5x^2 + 5x + 12 \end{array}$$



Observemos que $gr(R) = 1 < 2 = gr(Q)$.

De la división obtenemos

$$C(x) = 5x^2 + 5x + 12 \quad \text{y} \quad R(x) = 23x + 25$$

Como $R(x) = 23x + 25 \neq 0$, decimos que $P(x)$ no es divisible por $Q(x)$.

Podemos comprobar por el algoritmo de la división que

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$$

$$\begin{aligned} &= (x^2 - x - 2) \cdot (5x^2 + 5x + 12) + (23x + 25) \\ &= 5x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

2) Hallar el cociente y el resto de dividir $P(x) = 3x^4 - 3x^2 - 8x - 10$ por $Q(x) = x - 2$

$$\begin{array}{r} 3x^4 + 0x^3 - 3x^2 - 8x - 10 \quad | \quad x - 2 \\ \underline{3x^4 - 6x^3} \\ 6x^3 - 3x^2 - 8x - 10 \\ \underline{6x^3 - 12x^2} \\ 9x^2 - 8x - 10 \\ \underline{9x^2 - 18x} \\ 10x - 10 \\ \underline{10x - 20} \\ 10 \end{array}$$

De la división obtenemos $R(x) = 10$ y $C(x) = 3x^3 + 6x^2 + 9x + 10$

Por el algoritmo de la división podemos expresar

$$3x^4 - 3x^2 - 8x - 10 = (3x^3 + 6x^2 + 9x + 10)(x - 2) + 10$$

Regla de Ruffini

Cuando el polinomio divisor es de la forma $(x - a)$, un polinomio de grado 1 y mónico, con $a \in \mathbb{R}$, puede utilizarse un procedimiento más sencillo para la división.

Ejemplo

Hallar el cociente y el resto de dividir $P(x) = 3x^4 - 3x^2 - 8x - 10$ por $Q(x) = x - 2$ utilizando la Regla de Ruffini.

1. Completamos y ordenamos en forma decreciente el polinomio dividendo.
2. Disponemos la división en un cuadro ubicando únicamente los coeficientes del dividendo y el opuesto del término independiente del divisor.

3.

$$\begin{array}{c|cccccc} a & \Rightarrow & 2 & & & & \\ \hline & & 3 & 0 & -3 & -8 & -10 \end{array} \quad \leftarrow \text{Coeficientes del dividendo}$$

4. Bajamos el 3.

$$\begin{array}{c|cccccc} & & 3 & 0 & -3 & -8 & -10 \\ \hline 2 & & \downarrow & & & & \\ & & 3 & & & & \end{array}$$

5. Multiplicamos el número que bajamos por 2; ubicamos este producto debajo del siguiente coeficiente siguiente y sumamos los números de la columna.

6.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 0 & -3 & -8 & -10 \\ & \downarrow & + & & & \\ 2 & & 6 & & & \\ \hline & 3 & 6 & & & \end{array}$$

7. Repetimos el procedimiento desde el paso 5 reiteradas veces hasta completar.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 0 & -3 & -8 & -10 \\ & \downarrow & + & + & + & + \\ 2 & & 6 & 12 & 18 & 20 \\ \hline & 3 & 6 & 9 & 10 & 10 \end{array}$$



- Los coeficientes del cociente $C(x)$ y el resto $R(x)$ aparecen en la última fila.

- Dado que dividimos por un polinomio de grado 1, el resto será el polinomio nulo o un polinomio de grado cero (una constante) y se obtendrá en el último lugar.

- El polinomio cociente tendrá un grado menos que el dividendo y sus coeficientes serán los valores que aparecen en la última fila, ordenados de forma decreciente.

- $R(x) = 10$ y $C(x) = 3x^3 + 6x^2 + 9x + 10$.

- Por el algoritmo de la división podemos afirmar que $3x^4 - 3x^2 - 8x - 10 = (3x^3 + 6x^2 + 9x + 10)(x - 2) + 10$

Valor numérico de un polinomio

El *valor numérico* de un polinomio $P(x)$ en un número determinado $a \in \mathbb{R}$ es el valor que se obtiene al sustituir la variable x por a y realizar las operaciones correspondientes.

El *valor numérico* de un polinomio $P(x)$ en a se expresa $P(a)$

Ejemplo

El valor numérico del polinomio $P(x) = 5x^4 - 4x^2 + 6x - 1$ en 2 es el número

$$P(2) = 5(2)^4 - 4(2)^2 + 6 \cdot 2 - 1 = 75$$

Teorema del resto

Dados los polinomios $P(x)$ y $(x - a)$, el resto R de dividir $P(x)$ por $(x - a)$ se obtiene al sustituir la variable x por a en el polinomio $P(x)$ y se expresa como

$$R = P(a)$$

Ejemplo

En la división anterior, el resto de dividir $P(x) = 3x^4 - 3x^2 - 8x - 10$ por $(x - 2)$, puede obtenerse por el teorema de resto, sin realizar la división.

$$R = P(2) = 3 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 - 10 = 10$$

2.4.2. Raíces de un polinomio

Definición

Un número real a es raíz de un polinomio $P(x)$ si y sólo si $P(a) = 0$.

En símbolos

$$a \text{ es raíz de } P(x) \Leftrightarrow P(a) = 0$$



Si a es raíz de un polinomio, por el algoritmo de la división y el teorema del resto, podemos expresar

$$P(x) = (x - a) \cdot C(x) \quad , \quad C(a) \neq 0$$

Y podemos decir

$$P(x) \text{ es divisible por } (x - a) \quad \text{ó} \quad P(x) \text{ es múltiplo de } (x - a)$$

Ejemplos

1) Decidir si 2 y -3 son raíces del polinomio $P(x) = x^2 + 5x - 14$.

Calculamos $P(2)$ y $P(-3)$ para determinar si 2 y -3 son raíces del polinomio $P(x)$.

$P(2) = 4 + 10 - 14 = 0$, concluimos que $x = 2$ es raíz de $P(x)$.

$P(-3) = 9 - 15 - 14 = -20 \neq 0$ entonces $x = -3$ no es raíz de $P(x)$.

2) Encontrar las raíces del polinomio $Q(x) = x^2 - 4$.

Para ello debemos determinar los valores de x tales que $Q(x) = 0$. Este problema se reduce a resolver la ecuación

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$$

$$|x| = 2 \Leftrightarrow x = 2 \quad \text{ó} \quad x = -2$$

Las raíces del polinomio $Q(x)$ son $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$

3) Sea $T(x) = 2x^3 + 8x^2 - 2x - 8$

a) ¿ $T(x)$ es divisible por $(x + 4)$?

b) ¿Podemos conocer alguna raíz?

c) ¿Cuáles son todas las raíces reales de $T(x)$?

a) Para responder la primera pregunta debemos conocer el resto de la división de $T(x)$ por $(x + 4)$. Tenemos dos formas de proceder: realizar la división de $T(x)$ por $(x + 4)$ o utilizar el teorema del resto. En este caso, vamos a dividir usando la Regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 8 & -2 & -8 \\ -4 & & -8 & 0 & 8 \\ \hline & 2 & 0 & -2 & 0 \end{array}$$

El resto de esta división es nulo y el cociente es $C(x) = 2x^2 - 2$.

Concluimos que $T(x)$ es divisible por $(x + 4)$.

b) De lo obtenido en a) podemos decir que (-4) es raíz de $T(x)$.

c) Por el algoritmo de la división, $T(x) = 2x^3 + 8x^2 - 2x - 8 = (2x^2 - 2)(x + 4)$. Para determinar las raíces del polinomio $T(x)$, usamos la definición de raíz de un polinomio, y resolvemos la ecuación $T(x) = 0$.

$$T(x) = 0 \Leftrightarrow (2x^2 - 2)(x + 4) = 0$$

Por la propiedad del producto igual a cero escribimos las dos ecuaciones siguientes

$$x + 4 = 0 \quad \text{ó} \quad 2x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$$

De la primera ecuación obtenemos que $x = -4$ y de la segunda ecuación, $x = 1$ y $x = -1$; todos estos valores de x son raíces del polinomio $T(x)$.

4) Sea $S(x) = 5x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 5x - \frac{5}{2}$

a) Verificar que $x = \frac{1}{2}$ es raíz de $S(x)$.

b) ¿ $S(x)$ tiene otras raíces reales además de $x = \frac{1}{2}$?

a) Para comprobar que $x = \frac{1}{2}$ es raíz del polinomio $S(x)$ determinamos el valor numérico del polinomio en $\frac{1}{2}$

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = 5\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{5}{2} = 0$$

b) De lo realizado en a) podemos decir que $S(x)$ es divisible por $\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

Utilizando la Regla de Ruffini, dividimos $S(x)$ por $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ y obtenemos el cociente $(5x^2 + 5)$. Finalmente, podemos escribir:

$$5x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 5x - \frac{5}{2} = (5x^2 + 5)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Para hallar otras raíces debemos resolver la ecuación

$$5x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 5x - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow (5x^2 + 5)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$$

Por la propiedad del producto igual a cero, podemos escribir

$$5x^2 + 5 = 0 \quad \text{ó} \quad x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

La primera ecuación no tiene solución en el conjunto de los números reales.

De la segunda ecuación tenemos $x = \frac{1}{2}$ que es la única raíz real de $S(x)$.



En los últimos dos ejemplos los polinomios son de grado tres, $T(x)$ tiene tres raíces reales y $S(x)$ tiene una única raíz real. Este hecho está relacionado con el siguiente enunciado

”Un polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces reales”

El siguiente teorema nos ayuda a determinar las raíces racionales de los polinomios con coeficientes enteros.

Teorema de Gauss

Si una fracción irreducible $\frac{p}{q}$ es raíz de un polinomio $P(x)$ con coeficientes enteros entonces p divide al término independiente y q divide al coeficiente principal.

El procedimiento para encontrar las raíces racionales, si existen, de polinomios con coeficientes enteros, es:

1. Hallar los divisores p del término independiente y los divisores q del coeficiente principal.
2. Formar con ellos fracciones p/q que son las posibles raíces.
3. Utilizar el teorema del resto o la Regla de Ruffini para determinar si algunas de las fracciones es raíz.

Ejemplo

Dado el polinomio $Q(x) = 3x^3 + 12x^2 + 36x + 81$, encontrar sus raíces por el método de Gauss.

Sabemos que $Q(x)$ tendrá 3 raíces reales como máximo, pues el polinomio es de grado 3.

Coeficiente principal: 3

Coeficiente independiente: 81

p : divisores de 81: ± 1 ; ± 3 ; ± 9 ; ± 81

q : divisores de 3: ± 1 ; ± 3

Las posibles raíces se obtienen formando fracciones $\frac{p}{q}$

$$\frac{p}{q} = \left\{ \pm 1; \pm 3; \pm 9; \pm 81; \pm 27; \pm \frac{1}{3} \right\}$$

Este conjunto de números es un conjunto de “candidatos” a ser raíz racional del polinomio $Q(x)$, según el teorema de Gauss.

Desde ya, no todos estos valores pueden ser raíces de $Q(x)$, ya que $Q(x)$ tiene grado 3 y a lo sumo tiene tres raíces.

Para determinar las raíces, sustituimos, en el polinomio $P(x)$, la variable x por las fracciones $\frac{p}{q}$ obtenidas:

$$P(1) = 3 \cdot 1^3 + 12 \cdot 1^2 + 36 \cdot 1 + 81 = 132 \neq 0, \text{ por lo tanto } 1 \text{ no es raíz.}$$

$$P(-3) = 3 \cdot (-3)^3 + 12 \cdot (-3)^2 + 36 \cdot (-3) + 81 = 0, \text{ por lo tanto } -3 \text{ es raíz.}$$

Si continuamos, comprobaremos que la única raíz racional del polinomio es -3 .

2.4.3. Factorización de polinomios

Polinomios primos

Un polinomio $P(x)$ de grado $n \geq 1$ (grado no nulo) es *primo* cuando no puede ser expresado como producto de dos o más polinomios de menor grado.

Los únicos polinomios *primos* con coeficientes reales son los polinomios de grado uno (lineales) y los polinomios de grado par que no tienen raíces reales.

Ejemplos

Algunos polinomios primos son

$$x - 1, \quad 2x + 1, \quad x^2 + 1$$

Polinomios reducibles e irreducibles

Un polinomio es irreducible si es primo o si está expresado como producto de polinomios primos. En caso contrario, se dice que el polinomio es reducible.

Descomposición factorial

Si un polinomio reducible $P(x)$ está expresado como producto de polinomios de menor grado, se dice que está *factorizado*.

Un polinomio puede tener distintas factorizaciones, pero sólo una de ellas recibe el nombre de *descomposición factorial*.

Ejemplos

1) El polinomio $P(x) = 2x^3 + 8x^2 - 2x - 8$, como ya vimos en un ejemplo anterior, puede ser expresado de la siguiente forma

$$P(x) = (2x^2 - 2)(x + 4)$$

Ésta es una factorización de $P(x)$.

2) Vimos que las raíces de $2x^2 - 2$ son 1 y -1 , entonces este polinomio es divisible por $(x + 1)$ y también por $(x - 1)$.

Dividiendo $P(x)$ por $(x + 1)$, usando la regla de Ruffini, tenemos

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & 0 & -2 \\ -1 & & -2 & 2 \\ \hline & 2 & -2 & 0 \end{array}$$

$$2x^2 - 2 = (2x - 2)(x + 1)$$

Por lo tanto

$$P(x) = (2x - 2)(x + 1)(x + 4)$$

Esta es otra factorización del mismo polinomio.

Como $(2x - 2) = 2(x - 1)$ por la propiedad distributiva, finalmente tenemos:

$$P(x) = 2(x - 1)(x + 1)(x + 4)$$

Esta última factorización se llama *descomposición factorial*.

Una factorización de $P(x)$ es su descomposición factorial si sus factores son el coeficiente principal y polinomios primos mónicos.

Técnicas básicas de factorización de polinomios

Factor común

Consiste en buscar el máximo factor común del polinomio, que es una expresión del grado más alto que divide a cada término del polinomio.

Ejemplo

Para el polinomio $W(x) = 9x^4 + 6x^2 - 3x$

$3x$ es la expresión de mayor grado que divide a $9x^4$, $6x^2$ y $3x$, por lo tanto, $3x$ es el máximo factor común

$$W(x) = 3x(3x^3 + 2x - 1)$$

Factor común por grupos

Esta técnica sólo puede ser aplicada a polinomios con una cantidad *par de términos*.

Consiste en extraer el máximo factor común en cada uno de los grupos formados convenientemente. Luego se extrae nuevamente factor común, como lo ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Para factorizar el polinomio $Z(x) = 2x^5 + 4x^3 - x^2 - 2$ usando el procedimiento *factor común por grupos*, asociamos los términos convenientemente

$$Z(x) = (2x^5 + 4x^3) + (-x^2 - 2)$$

Sacamos el máximo factor común en cada grupo y tenemos

$$Z(x) = 2x^3(x^2 + 2) - (x^2 + 2)$$

Como la expresión $(x^2 + 2)$ es un factor común, escribimos

$$Z(x) = (x^2 + 2)(2x^3 - 1)$$

Diferencia de cuadrados

Al invertir el producto notable para la suma y resta de dos términos se obtiene un método para factorizar una diferencia de cuadrados.

Si A y B son dos expresiones algebraicas entonces

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

Ejemplos

Factorizar los siguientes polinomios utilizando el procedimiento correspondiente para una diferencia de cuadrados

$$1) D(x) = 4x^2 - 25$$

$$D(x) = (2x + 5)(2x - 5)$$

$$2) R(x) = x^4 - 16$$

$$R(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 4)$$

$$R(x) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$$

Trinomio cuadrado perfecto

Esta técnica de factorización se basa en los productos especiales siguientes:

Si A y B son dos expresiones algebraicas entonces

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$$

$$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$$

Ejemplos

Factorizar los siguientes polinomios utilizando el procedimiento correspondiente para un trinomio cuadrado perfecto

$$1) T(x) = x^2 + 6x + 9$$

$$2) S(x) = x^2 - 6x + 9$$

$$T(x) = x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2$$

$$S(x) = x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2$$

$$T(x) = (x + 3)^2$$

$$S(x) = (x - 3)^2$$

Factorización de un polinomio conociendo una raíz

Si tenemos un polinomio $P(x)$ del cual conocemos una raíz a , sabemos que $P(x)$ es divisible en $(x - a)$ y podemos escribir, por el algoritmo de la división (o usando la Regla de Ruffini), $P(x) = (x - a) \cdot C(x)$. Es decir que $(x - a)$ será uno de sus factores de factorización.

Ejemplos

1) Hallar la descomposición factorial del polinomio $Q(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ sabiendo que 1 es raíz del polinomio.

Como 1 es raíz de $Q(x)$ sabemos que $(x - 1)$ divide a $Q(x)$.

Dividimos, usando la Regla de Ruffini, y obtenemos

$$Q(x) = (x - 1)(x^2 + 5x + 6)$$

Si ahora factorizamos $(x^2 + 5x + 6)$ buscando sus raíces con la fórmula resolvente, obtenemos la descomposición

$$Q(x) = (x - 1)(x + 2)(x + 3)$$

2) Factorizar el polinomio $P(x) = 2x^3 + 6x^2 - 8x - 24$

p : divisores del término independiente -24 : $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 8; \pm 12; \pm 24$

q : divisores de 2: $\pm 1; \pm 2$

Las posibles raíces se obtienen formando las fracciones $\frac{p}{q}$

$$\left\{ \pm \frac{1}{2}; \pm 1; \pm \frac{3}{2}; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 8; \pm 12; \pm 24 \right\}$$

En el polinomio $P(x)$ sustituimos x por los números del conjunto anterior:

$$P(1) = 2 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 - 24 = -24 \neq 0, \text{ por lo tanto } 1 \text{ no es raíz.}$$

$$P(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + 6 \cdot (-2)^2 - 8 \cdot (-2) - 24 = 0, \text{ por lo tanto } -2 \text{ es raíz del polinomio.}$$

Así, $P(x)$ es divisible por $x + 2$ y usando la regla de Ruffini, tenemos:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 6 & -8 & -24 \\ -2 & & -4 & -4 & 24 \\ \hline & 2 & 2 & -12 & 0 \end{array}$$

$$C(x) = 2x^2 + 2x - 12$$

Por lo tanto

$$P(x) = (2x^2 + 2x - 12)(x + 2)$$

Para continuar factorizando el polinomio $P(x)$ podemos repetir el mismo procedimiento o usar otros métodos de factorización.

Ejemplo

En este ejemplo, como el polinomio $C(x) = 2x^2 + 2x - 12$ es de grado 2, podemos usar la fórmula resolvente para encontrar sus raíces

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12)}}{2 \cdot 2}$$

Los valores 2 y -3 son las raíces del polinomio $C(x) = 2x^2 + 2x - 12$. Su factorización será $C(x) = 2(x - 2)(x + 3)$.

Finalmente, el polinomio $P(x)$ queda factorizado de la siguiente forma

$$P(x) = 2 \cdot (x + 2)(x - 2) \cdot (x + 3)$$

En general, para hallar la descomposición factorial de un polinomio podemos combinar las técnicas de factorización eligiendo las más convenientes.

Ejemplo

Hallar la descomposición factorial del polinomio $A(x) = (x^4 + 6x^3 + 9x^2)(x^2 - 4)$.

Si bien el polinomio está expresado como el producto de factores, no es su descomposición factorial.

En el primer paréntesis podemos usar la técnica de factor común y nos queda

$$A(x) = x^2(x^2 + 6x + 9)(x^2 - 4)$$

Podemos identificar que $(x^2 + 6x + 9)$ es un trinomio cuadrado perfecto y que $(x^2 - 4)$ es una diferencia de cuadrados, al factorizar cada uno de ellos tenemos

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2 \text{ y } x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

Por lo que, combinando distintas técnicas, la descomposición factorial del polinomio es

$$A(x) = x^2(x + 3)^2(x - 2)(x + 2)$$

Resolución de ecuaciones polinómicas

Ahora estamos en condiciones de resolver ecuaciones polinómicas

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

En un punto anterior ya resolvimos ecuaciones lineales y cuadráticas.

En los ejemplos dados a continuación mostramos un procedimiento para resolver ecuaciones polinómicas de grado $n \geq 3$.

Ejemplo

Encontrar todas las soluciones reales de la ecuación $x^3 + 4x^2 - 12x = 0$

Factorizamos la expresión algebraica del primer miembro sacando factor común x

$$x \cdot (x^2 + 4x - 12) = 0$$

Por la propiedad del producto igual a cero

$$x = 0 \quad \vee \quad x^2 + 4x - 12 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática $x^2 + 4x - 12 = 0$ se obtienen las raíces

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -6$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación $x^3 + 4x^2 - 12x = 0$ son:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -6, \quad x_3 = 0$$

El conjunto solución de la ecuación $x^3 + 4x^2 - 12x = 0$ es: $S = \{-6, 0, 2\}$

3. Trabajo práctico

3.1. Números reales

1. Leer cada afirmación y decidir si es verdadera (V) o falsa (F) en relación a los números reales. Justificar las que consideres falsas.

- ☐ Los números racionales incluyen tanto a los enteros como a los decimales.
☐ π es un número irracional.
☐ La suma de un número racional y un número irracional siempre es irracional.
☐ Todos los números Naturales son Enteros.
☐ La raíz cuadrada de un número negativo es un número real.
☐ Los números reales pueden representarse completamente en una recta numérica.
☐ Todos los números Enteros son Naturales.
☐ Entre dos números reales no siempre es posible encontrar otro número real.
☐ La multiplicación de dos números irracionales no siempre resulta en un número irracional.

2. Completar los espacios en blanco de manera que se obtenga una relación verdadera. Utilizando los símbolos: $\in$; $\notin$; $\subset$; $\not\subset$

$$\begin{array}{cccc}
 -3 \quad \underline{\hspace{1cm}} \mathbb{N} & \mathbb{Z} \quad \underline{\hspace{1cm}} \mathbb{N} & 2\pi \quad \underline{\hspace{1cm}} \mathbb{R} & \frac{1}{2} \quad \underline{\hspace{1cm}} \mathbb{Q} \\
 \mathbb{Q} \quad \underline{\hspace{1cm}} \mathbb{R} & \sqrt{2} \quad \underline{\hspace{1cm}} \mathbb{Q} & \mathbb{N} \quad \underline{\hspace{1cm}} \mathbb{R} & \frac{3}{2} \quad \underline{\hspace{1cm}} \mathbb{I}
 \end{array}$$

3. Completar los espacios en blanco de forma que se obtenga una proposición verdadera. Utilizar los símbolos: $=$, $>$, $<$ según corresponda:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a)} & 0,22 & \underline{\hspace{1cm}} & 0,222 \\
 \text{b)} & -1,54 & \underline{\hspace{1cm}} & -1,53 \\
 \text{c)} & 1,34 & \underline{\hspace{1cm}} & 1,3\bar{4} \\
 \text{d)} & \pi & \underline{\hspace{1cm}} & 3,1415 \\
 \text{e)} & -e & \underline{\hspace{1cm}} & -2,718 \\
 \text{f)} & -4,2\bar{1} & \underline{\hspace{1cm}} & -4,21
 \end{array}$$

4. Representar con símbolos las siguientes proposiciones:

- a) -1 es mayor que -4
 b) a es menor o igual que b .
 c) x no es igual a -3 .
 d) b no pertenece al conjunto de los números naturales
 e) El opuesto de un número a .
 f) a_1 es un elemento del conjunto A

5. Calcular:

- a) El 50% de 1474.
 b) El 28% de 263.
 c) ¿Qué porcentaje representa 41,05 de 821?
 d) ¿Qué porcentaje representa el incremento que hay de 543 a 678,75?

6. Determinar el valor del módulo aplicando la definición:
 - a) $|7 - 12|$
 - b) $|12 - 7|$
 - c) $|-2| \cdot |3|$
 - d) $|a|$
7. Determinar la distancia entre los siguientes pares de números en términos de valor absoluto:
 - a) -7 y 3
 - b) -2 y -8
 - c) 3 y 11
8. Determinar la diferencia entre el triple de la distancia entre -4 y 2 y el doble de la distancia entre 8 y -9 .
9. Un suplemento proteico contiene 4% de grasa, 64% de carbohidrato y el resto de proteínas. ¿Cuántos gramos de cada nutriente contiene una porción de suplemento? (Nota: Considerar que 1 porción = 45 g)
10. Una aleación está compuesta por $\frac{7}{24}$ de cobre, $\frac{5}{24}$ de plata y $\frac{1}{2}$ de oro. ¿Cuántos gramos de cada metal habrá en 34 g de aleación? ¿Qué porcentaje representa cada metal en la aleación?
11. María compra una bicicleta por $\$107\,000$. Luego de un tiempo la pone en venta incrementando su precio original en un 40% . Posteriormente, debido a que no puede venderla, rebaja el precio en un 15% . Finalmente vende la bicicleta.
 - a) ¿Cuál fue el precio de venta final?
 - b) ¿Cuánto dinero de más hubiese obtenido si lo vendía en la primera instancia?
12. Una estancia tiene 480 ha . El 30% de la mitad de la misma está sembrada de hortalizas y el resto se dedica al cultivo de frutos menores. ¿Cuántas hectáreas están sembradas de frutos menores??
13. En un campo destinado a la producción de alimentos cuenta con una superficie de 260 ha . De ellas el 20% se destina al cuidado y pastoreo de ganado menor y el 50% del resto está destinado a la horticultura. ¿Qué superficie de la tierra en el campo se dedica al cultivo en huerta?
14. Realizar las siguientes operaciones:
 - a) $\frac{1}{3} - 3\left(0.5 - \frac{3}{2}\right) - \frac{2}{5} + \frac{5}{2}$
 - b) $\frac{1}{3} - \left[\frac{1}{4} - \left(-\frac{3}{5} + \frac{2}{10}\right)\right] - \frac{2}{3}\left(5 \cdot \frac{1}{2} - 2\right)$
 - c) $\left[\frac{4}{5} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3}\right)\right] \div \left[\left(\frac{2}{7} + 1\right) \cdot \frac{3}{2}\right]$
 - d) $\frac{1}{-\frac{2}{5} + 3} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{4}} - \frac{3}{10} \div \frac{1}{2}$
15. Calcular utilizando las propiedades de la potencia.
 - a) $(-2)^5$
 - b) -4^{-2}
 - c) $\left(-\frac{1}{7}\right)^2$

d) $(3)^{-3}$ e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ f) $\frac{3^{-1}}{2}$

16. Simplificar las siguientes expresiones utilizando las propiedades de la potencia.

a) $\frac{2^8 \cdot 2^{-1}}{2^4}$ b) $3^{10} \cdot 3^{-3} + 3^7$

c) $\left(\frac{2^3 - 2^2}{32}\right)^2$ d) $\left(\left(b^{\frac{5}{3}}\right)^6 \cdot b^2\right)^2$

17. Identificar, si existe, el error en las siguientes expresiones y resolver de manera adecuada:

a) $-2^2 = 4$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

c) $\frac{2^{-3}}{5} = \frac{5}{2^3} = \frac{5}{8}$ d) $\left(\frac{3^3 + 3^2}{3}\right)^2 = \frac{(3^3 + 3^2)^2}{3^2} = \frac{3^6 + 3^4}{3^2} = \frac{3^{10}}{3^2} = 3^8$

18. Expresar las siguientes constantes empleando notación científica y la unidad indicada:

a) Constante universal de los gases, $R = 0.008214 \text{ kJ/mol} \cdot K$

b) Velocidad de la luz: $V = 299792458 \text{ m/s}$

19. Calcular y expresar el resultado en notación científica:

a) $\frac{32 \times 10^{-17}}{1.25 \times 10^{-39}}$ b) $\frac{6.25 \times 10^{-4} \cdot 2}{8.6252 \times 10^{-46} \cdot 6.14 \times 10^{14}}$

20. Si es posible, calcular y verificar utilizando la calculadora:

a) $\sqrt[6]{64}$ b) $\sqrt[3]{-27}$ c) $\sqrt{-9}$

d) $\sqrt[4]{16}$ e) $\sqrt[4]{\left(-\frac{1}{25}\right)^{-4}}$

21. Expresar en forma radical las siguientes potencias:

a) $5^{\frac{1}{2}}$ b) $9^{\frac{2}{3}}$ c) $7^{-0.5}$ d) $16^{0.1}$ e) $9^{-\frac{1}{4}}$

22. Identificar, si existe, el error en las siguientes expresiones y resolver de manera adecuada:

a) $\sqrt{a b} = \sqrt{a} \sqrt{b}$ b) $\frac{2^3}{3^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$

c) $\sqrt{5+3} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$ d) $\sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$

23. Realizar las siguientes operaciones:

a) $\frac{2}{5} \sqrt[3]{-27} + \frac{1}{2} \sqrt{(-5)^2} - \frac{1}{10} \sqrt[3]{(-2)^6}$

$$b) -\left[\frac{1}{7}\left(5 + \frac{1}{7}\right) + 1 \div \left(\frac{7}{8}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$c) -\sqrt[3]{16} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{128}{27}} + 3\sqrt[3]{250}$$

24. Racionalizar las expresiones simplificando siempre que sea posible:

$$a) \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

$$b) \frac{1}{1 + \sqrt{5}}$$

$$c) \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - \sqrt{5}}$$

25. Verificar las siguientes igualdades:

$$a) \frac{\sqrt{2} - 2}{1 - \sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$b) \frac{1}{1 - \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3} + 1} = -\sqrt{3}$$

26. Completar la tabla usando la forma que corresponda:

Forma logarítmica	Forma exponencial
	$3^4 = 81$
$\log_{16} 2 = \frac{1}{4}$	
	$25^{3/2} = 125$
$\log_7 \left(\frac{1}{49}\right) = -2$	
	$64^{2/3} = 16$
$\log_5 \left(\frac{1}{125}\right) = -3$	

27. Calcular los siguientes logaritmos y verificar los resultados utilizando la calculadora:

$$a) \log 0,01$$

$$b) \log_{36} 6$$

$$c) \log_2 \sqrt{8}$$

$$d) \log_{25} \sqrt[5]{25}$$

$$e) \log_{1/3} 27^{-2}$$

$$f) \log_{1/3} 27^{-3}$$

28. Si se conoce que:

$$\log(x) \approx 0.3 \quad \log(y) \approx 0.47 \quad \log(z) \approx 0.69 \quad \log(t) \approx 0.84$$

Calcular, sin utilizar calculadora, el resultado de cada expresión:

$$a) \log(x \cdot y^2) - \log(x^4) + \log(z \cdot t) \quad b) \log\left(\frac{x}{z}\right)^3 - \log\left(\frac{1}{t}\right)^4$$

3.2. Expresiones algebraicas

- Escribir una expresión algebraica en cada caso:
 - El siguiente de un número natural.
 - La suma de un número natural y su siguiente.
 - El perímetro de un rectángulo del cual se conoce que la altura es igual a la base aumentada en 3.
 - La tercera parte de la suma entre un número real y tres.
 - El área de un triángulo rectángulo cuyo cateto mayor es el menor aumentado en dos.
 - La mitad de la diferencia entre a y b .
- Resolver las siguientes ecuaciones lineales en una variable. Comprobar que el valor obtenido, si existe, es solución de la ecuación:
 - $5x + 2 = -18$
 - $15 - x = 2x - 3(x - 5)$
 - $x + \frac{3 - x}{7} = \frac{5}{7}$
 - $x - 4 - (2x + 9) = -\frac{(2x + 10)}{2}$
- En un rectángulo $ABCD$ se conoce que la longitud de su base es el triple de su ancho y su perímetro es de 72 m . Calcular las dimensiones del rectángulo.
- El sector de pasto en una granja tiene forma rectangular, su perímetro es igual a 2640 m . Sabiendo que su ancho es un décimo de su largo. Determinar el área destinada al pastoreo en la granja.
- Una tienda de electrónica actualiza los precios en sus equipos, incrementando un 15% el valor de sus productos. Si Lucas compró una calculadora graficadora por \$ 35075 ¿Cuál era el precio antes del aumento?
- Resolver las siguientes desigualdades lineales y representar el conjunto solución en la recta numérica:
 - $2 - x < 5$
 - $x + 4 < \frac{1}{2}(2x + 10)$
 - $x + 3 > \frac{1}{2}(2x + 6)$
 - $2x - 13 \leq 9 - 2x$
 - $\frac{x - 8}{5} \geq x - (3x + 2)$
- Juan tiene \$ 6800 para repartirlos entre sus dos hijos, Ana y Rodolfo. Si a Ana le da el triple que a Rodolfo, ¿cuánto dinero recibe cada uno?
- La carga máxima que puede transportar un camión es de 40000 kg . Si se sabe que en cada viaje transporta como mínimo 6000 kg , ¿cuántos paquetes de 90 kg puede transportar en cada viaje?
- Encontrar, si existen, las soluciones reales de las siguientes ecuaciones. Verificar la/las soluciones obtenidas:
 - $x^2 - 9 = 0$
 - $x^2 + 4 = 0$
 - $(x + 3)(x - 5) = 0$

- d) $x - \frac{1}{2}x^2 = x^2 + 4$ e) $(x^2 - 4)(x^2 + 5) = 0$
10. Usando el discriminante, indicar cuántas raíces reales existen en cada caso:
- a) $4x^2 - 3x + 1 = 0$ b) $-5x^2 + 2x = 0$
c) $x^2 + 6x = -9$ d) $x^2 = -5 - 3x$
11. Determinar el/los valor/es de k en las siguientes ecuaciones, para que sus raíces cumplan la condición en cada caso:
- a) La ecuación $3x^2 + 5x + k = 0$ tenga dos soluciones iguales.
b) La ecuación $\frac{2}{3}x^2 + k = 0$ no tenga soluciones reales.
c) La ecuación $20 = -kx^2 + 7$ tenga dos soluciones distintas.
12. Si la diagonal de un rectángulo mide 18 cm y uno de los lados 7 cm ¿cuánto mide el otro lado?
13. Determinar la altura y el área de un triángulo equilátero de lado $\sqrt{11} \text{ m}$.
14. Un jardín rectangular tiene 2.400 m^2 de superficie y mide 20 m menos de ancho que de largo. ¿Qué dimensiones tiene el jardín?
15. Juan quiere construir una cerca perimetral en su terreno de 2500 m^2 , que está formado por dos parcelas cuadradas. Una de ellas mide 10 m de lado más que la otra.
- a) Plantear la ecuación que permite calcular la medida del lado de cada parcela.
b) Calcular el perímetro del terreno de Juan.
16. Indicar el grado y el coeficiente principal de los polinomios:
- a) $P(x) = 5x^3 + \frac{x^2}{3} + 2x$ b) $Q(x) = x - \frac{x^5}{2} - 20x^2 + 1$
c) $R(x) = (2x^2)^4 - 2x$
17. Hallar el valor de h y k sabiendo que $P(x) = Q(x)$ siendo:
- $$P(x) = x^4 - hx^3 + (3k + 1)x + 10 \quad ; \quad Q(x) = x^4 - 10x^3 + 12x + 10$$
18. Hallar h , k y j , sabiendo que:
- $$P(x) = 3hx^2 + 5kx + j \quad ; \quad Q(x) = \frac{1}{2}x^2 - kx - 2$$
- $$P(x) - Q(x) = 4hx^2 - \frac{3}{2}x - 8j$$
19. Dados los polinomios:
- $$P(x) = x^2 + 2x - \frac{1}{2} \quad ; \quad Q(x) = 3x - 5 \quad ; \quad R(x) = x^3 - x + 1$$
- Calcular las siguientes operaciones:

a) $3P(x) + Q(x)$ b) $P(x) \cdot Q(x) - R(x)$ c) $[Q(x)]^2 + (x + 2)$

20. Hallar el cociente y el resto que resultan de dividir P por Q y decidir si “ Q divide a P ”:

$$P(x) = x^4 + 5 + 2x^3 - 6x^2 \quad ; \quad Q(x) = x^2 + 2x$$

21. Sea el polinomio $P(x) = 2x^3 - 16x^2 + x - 1$, determinar el polinomio divisor $Q(x)$ tal que el cociente $C(x)$ sea $2x$ y el resto $R(x)$ sea $x - 1$.

22. Encontrar el valor numérico de los siguientes polinomios:

a) $P(x) = (x - 2)(2x^2 - 3)$ para $x = -5$

b) $Q(x) = -2x^4 + 5x^3 + 7x^2 - 9x + 6$ para $x = 3$

23. ¿Cuál es el resto de la división $(x^3 + 3x^2 - 7x + 6) \div (x + 2)$? ¿Es $x = -2$ raíz del polinomio?

24. ¿Para qué valor de k la división $(x^3 + kx^2 + 6) \div (x + 1)$ es exacta?

25. ¿Es $P(x) = 2x^3 - 7x^2 - 2x + 7$ múltiplo de $(x - 1)$?

26. Hallar las raíces reales, si existen, de los siguientes polinomios:

a) $P(x) = x^2 - 81$

b) $P(x) = x^2 + 6x$

c) $P(x) = (x - 2)(x^2 - 9)$

d) $P(x) = 3x^4 - 2x^2 + 3$

27. Factorizar el polinomio $P(x) = -48 - 8x^3 + 44x + 14x^2 - 2x^4$ sabiendo que 1, -4 son raíces. Escribir el polinomio de la forma factorizada.

28. Hallar la descomposición factorial de los siguientes polinomios. Indicando las raíces reales:

a) $P(x) = 16x^2 - 25$

b) $Q(x) = -x^2 + 20$

c) $R(x) = 2x^3 - 14x - 12$

29. Resolver las siguientes ecuaciones en el conjunto de los números reales R . Verificar en la ecuación la/las soluciones obtenidas:

a) $3t^2 - t^4 = 0$

b) $5x^3 - x^2 = 0$

c) $7h + 2h^3 = -9$

d) $(3x^4 + 2)(x^3 - 2x) = 0$

4. Respuestas

4.1. Números reales

1. V

V

V

V

F

V

F

F

V

2.

$\notin$

$\not\subset$

$\in$

$\in$

$\subset$

$\not\subset$

$\subset$

$\not\subset$

3.

a) $<$

b) $<$

c) $<$

d) $>$

e) $>$

f) $>$

4.

a) $-1 > -4$

b) $a \leq b$

c) $x \neq -3$

d) $b \notin \mathbb{N}$

e) $-a$

f) $a_1 \in A$

5.

a) 737

b) 73,64

c) 5%

d) 25%

6.

a) 5

b) 5

c) 6

d) $|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$

7.

- a) 10 b) 6 c) 8
8. -16
9. Grasa: 1.8 g Carbohidratos: 28.8 g Proteínas: 14.4 g
10. Cobre: 9.91 g (29.17%), Plata: 7.08 g (20.83%), Oro: 17 g (50%)
11. a) \$ 127.330 b) \$ 22.470
12. 408 ha
13. 104 ha
14.
 - a) $\frac{163}{30}$ b) $-\frac{13}{20}$
 - c) $-\frac{14}{81}$ d) $-\frac{279}{715}$
15.
 - a) -32 b) $-\frac{1}{16}$ c) $\frac{1}{49}$
 - d) $\frac{1}{27}$ e) $\frac{27}{8}$ f) $\frac{1}{6}$
16.
 - a) 2^3 b) $2 \cdot 3^7$
 - c) 2^{-6} d) b^{24}
17.
 - a) -4 b) $\frac{1}{32}$
 - c) $\frac{1}{40}$ d) 144
18.
 - a) $R = 8.314 \times 10^{-3} \frac{kJ}{mol.K}$
 - b) $N_a = 2.99792458 \times 10^8 \frac{m}{s}$
19.
 - a) 2.56×10^{23} b) 2.36×10^{28}
20.
 - a) 2 b) -3 c) $\frac{\pi}{2}$
 - d) 2 e) 25

21.

- a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt[3]{81}$ c) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ d) $\sqrt[10]{16}$ e) $\frac{1}{\sqrt[4]{9}}$

22.

- a) Correcta b) $\frac{8}{9}$
c) $\sqrt{8}$ d) Correcta

23.

- a) $\frac{9}{10}$
b) $-\frac{10}{7}$
c) $\frac{41}{3}\sqrt[3]{2}$

24.

- a) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ b) $-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}$ c) $\frac{6 + \sqrt{15}}{7}$

25. -

26.

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_3 81 = 4$	$3^4 = 81$
$\log_{16} 2 = \frac{1}{4}$	$16^{1/4} = 2$
$\log_{25} 125 = \frac{3}{2}$	$25^{3/2} = 125$
$\log_7 \left(\frac{1}{49}\right) = -2$	$7^{-2} = \frac{1}{49}$
$\log_{64} 16 = \frac{2}{3}$	$64^{2/3} = 16$
$\log_5 \left(\frac{1}{125}\right) = -3$	$5^{-3} = \frac{1}{125}$

27.

- a) -2 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{2}$
d) $\frac{1}{5}$ e) 6 f) 9

28.

- a) 1.57 b) 2.19

4.2. Expresiones algebraicas

1.
 - a) $n + 1, \quad n \in \mathbb{N}$
 - b) $2n + 1, \quad n \in \mathbb{N}$
 - c) $4l + 6, \quad l \in \mathbb{R}^+$
 - d) $\frac{1}{3}(x + 3), \quad x \in \mathbb{R}$
 - e) $\frac{1}{2}x^2 + x, \quad x \in \mathbb{R}^+$
 - f) $\frac{1}{2}(a - b)$
2.
 - a) $S = \{-4\}$
 - b) $S = R$
 - c) $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$
 - d) $S = \emptyset$
3. Ancho: 9 m, largo: 27 m.
4. Área: 144000 m²
5. \$ 30500
6.
 - a) $S = (-3, \infty)$
 - b) $S = \emptyset$
 - c) $S = R$
 - d) $S = \left(-\infty, \frac{11}{2}\right]$
 - e) $S = \left[-\frac{2}{11}, \infty\right)$
7. Ana recibe \$5100 y Rodolfo \$1700.
8. El camión transporta entre 67 y 444 paquetes en cada viaje.
9.
 - a) $S = \{-3, 3\}$
 - b) $S = \emptyset$
 - c) $S = \{-3, 5\}$
 - d) $S = \emptyset$
 - e) $S = \{-2, 2\}$
10.
 - a) No tiene solución real
 - b) Dos raíces reales y distintas.
 - c) Dos raíces reales iguales. Única solución.
 - d) No tiene solución real
11.
 - a) $k = \frac{25}{12}$

b) $k > 0$

c) $k < 0$

12. $\sqrt{275} \text{ cm}$

13. $\frac{\sqrt{33}}{2}m$; $\frac{\sqrt{363}}{4}m^2$

14. $60\text{ m} \times 40\text{ m}$

15.

$$2l^2 + 20l - 2400 = 0 \quad ; l: \text{lado de la parcela}$$

220 *m*

16.

a) $gr(P) = 3$; $a_3 = 5$

b) $gr(R) = 5$ $a_5 = -\frac{1}{2}$

c) $gr(R) = 8$ $a_8 = 16$

17. $h = 10$ y $k = \frac{11}{3}$

18. $h = -1/2$ $k = -1/4$ $j = -2/9$

19.

a) $3x^2 + 9x - \frac{13}{2}$ b) $2x^3 + x^2 - \frac{21}{2}x + \frac{3}{2}$ c) $9x^2 - 29x + 27$

20. $C(x) = x^2 - 6$; $R(x) = 12x + 5$, por lo tanto $Q(x)$ no divide a $P(x)$

21. $Q(x) = x^2 - 8x$

22.

a) $P(-5) = -329$

b) $Q(3) = 15$

23. $R(x) = 24$. No es raíz

24. $k = -5$

25. Si

26.

a) $x_1 = -9, x_2 = 9$

b) $x_1 = 0, x_2 = -6$

c) $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = -3$

d) No tiene raíces reales

27. $P(x) = -2(x - 1)(x + 4)(x + 3)(x - 2)$

28.

a) $P(x) = 16\left(x - \frac{5}{4}\right)\left(x + \frac{5}{4}\right)$

b) $Q(x) = -(x - \sqrt{20})(x + \sqrt{20})$

c) $R(x) = 2(x - 3)(x + 1)(x + 2)$

29.

a) $S = \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$

b) $S = \left\{0, \frac{1}{5}\right\}$

c) $S = \{-1\}$

d) $S = \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$

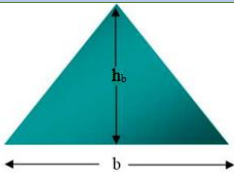
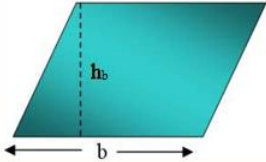
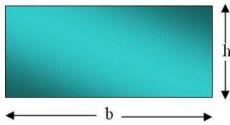
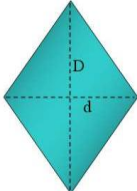
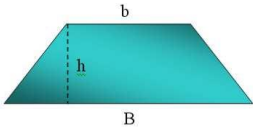
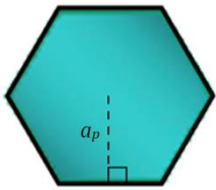
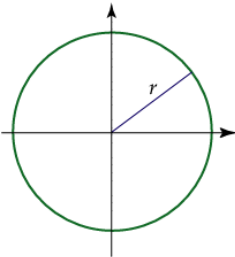
5. Bibliografía

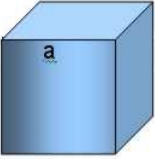
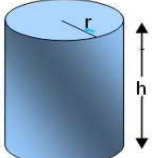
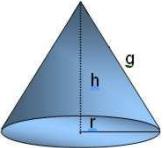
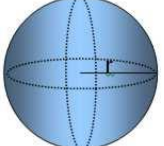
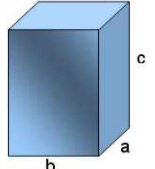
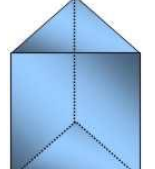
- Demana, F., Waits, B., Foley, G., Kennedy, D. y Blitzer, R. (2009). *Matemáticas universitarias introductorias*. México: Ed. Pearson.
- Novelli, A. (2005). *Elementos de Matemática* (4ª ed.). Edición del autor. Buenos Aires.
- Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2012). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo* (6ª ed.). México: Cengage Learning.
- Zill, D., Dewar, J, (2007). *Precálculo con avances de Cálculo* (4ª ed.). México: Ed. Mc Graw-Hill Interamericana

6. ANEXO

Símbolo	Significado
$=$	Igual a ...
$\neq$	Distinto o no es igual a ...
$\cong$	Aproximadamente igual a ...
$>$	Mayor que ...
$<$	Menor que ...
$\geq$	Mayor o igual que ...
$\leq$	Menor o igual que ...
$\exists$	Existe
$\nexists$	No existe
$/$	Tal que ...
$\forall$	Para todo ...
$\therefore$	Por lo tanto ...
$\Rightarrow$	Implicación, entonces ... (condición necesaria)
$\Leftrightarrow$	Doble implicación, sí y sólo sí ... (condición necesaria y suficiente)
$\in$	Pertenece ...
$\notin$	No pertenece ...
$\subset$	Incluido en ...
$\emptyset$	Conjunto vacío
$\cup$	Unión
$\cap$	Intersección
$\{ \dots \}$	Notación de conjunto
$\vee$	Disyunción, "o"
$\wedge$	Conjunción, "y"
∞	Infinito

Perímetros, áreas y volúmenes

Figuras planas		ÁREA	PERÍMETRO
Triángulo		$A_{\Delta} = \frac{b \cdot h_b}{2}$ b y h_b : base del triángulo y su altura relativa.	$P_{\Delta} = a + b + c$ a , b y c : longitudes de los lados.
Paralelogramo		$A_{Pa} = b \cdot h_b$ b y h_b : base del paralelogramo y su altura relativa.	$P_{ABCD} = 2 \cdot (a + b)$ a y b : longitudes de los lados.
Rectángulo		$A_{Rect} = b \cdot h$ b y h : longitudes de los lados.	$P_{ABCD} = 2 \cdot (b + h)$
Rombo		$A_{Rombo} = \frac{D \cdot d}{2}$ D y d : longitudes de las diagonales.	$P_{Rombo} = 4 \cdot a$ a : longitud de los lados.
Cuadrado		$A_{Cuad} = a^2$ a : longitud de los lados.	$P_{Cuad} = 4 \cdot a$ a : longitud de los lados.
Trapezio		$A_{Trapezio} = \frac{(B + b)}{2} \cdot h$ B y b : longitudes de las bases. h : longitud de la altura.	$P_{Trapezio} = a + b + c + d$ a , b , c y d : longitudes de los lados.
Polígono regular		$A_{P regular} = \frac{P_T \cdot a_p}{2}$ P_T : el valor del perímetro. a_p : longitud de la apotema.	$P_T = n \cdot a$ a : longitud de los lados. n : cantidad de lados del polígono.
Circunferencia y círculo		$A = \pi \cdot r^2$ A = área del círculo r : radio de la circunferencia	$L = 2\pi r$ L : Longitud de la circunferencia.

Cuerpo	Figura	Superficie	Volumen
Cubo		$A = 6 a^2$	$V = a^3$
Cilindro		Área lateral: $2\pi r h$ Área total: $2\pi r h + 2\pi r^2$	$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$
Cono		Área lateral: $\pi \cdot r \cdot g$ r : radio de la base g : generatriz $A_{total} = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot g$	$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$
Esfera		$S = 4 \cdot \pi \cdot r^2$	$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$
Prisma rectangular		$A_{total} = \text{área lateral} + 2 \cdot \text{área de la base}$ $A = 2ab + 2ac + 2bc$	$V = a \cdot b \cdot c$
Prisma triangular		$A_{total} = \text{área lateral} + 2 \cdot \text{área de la base}$	El volumen es igual a la superficie de la base por la altura