

INDICE

Agradecimientos
 Indice
 Sumario
 Listado de Figuras
 Listado de Tablas
 Notación

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN

1.1 Descripción del Problema en Estudio.....	1
1.1.1 El Ensayo de Extracción para la Evaluación de la Resistencia del Hormigón..	2
1.2 Objetivos y Alcance de la tesis.....	5

CAPÍTULO 2: ANTECEDENTES

2.1 Introducción.....	6
2.2 Estudios analíticos, numéricos y experimentales.....	11
2.3 Conclusiones.....	23

CAPÍTULO 3: FUNDAMENTOS DE LA ELASTICIDAD

3.1 Análisis de Tensiones.....	24
3.2 Análisis de Deformaciones.....	48

CAPITULO 4: LEYES CONSTITUTIVAS

4.1 Generalidades.....	81
4.2 Pasos para realizar un Modelo Constitutivo.....	82
4.3 Clasificación de Modelos Constitutivos.....	82
4.3.1 Modelos Elásticos.....	84
4.3.2 Modelos Inelásticos.....	101

CAPITULO 5: METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

5.1 Introducción.....	125
5.2 Método de los Elementos Finitos.....	126
5.2.1 Método basado en Equilibrio.....	126
5.2.2 Métodos basado en conceptos energéticos.....	129
5.2.2.1 Discretización de una estructura en triángulos de tres nodos.....	131
5.2.2.2 Discretización del campo de desplazamientos.....	131

5.2.2.3 Discretización del campo de deformaciones.....	135
5.2.2.4 Discretización del campo de tensiones.....	137
5.2.2.5 Ecuaciones de equilibrio de la discretización.....	137
5.2.2.6 Formulación básica del elemento rectangular de cuatro nodos.....	141
5.3 Métodos de solución numérica en análisis no lineal.....	145
5.3.1 Procedimiento Iterativo.....	146
5.3.2 Procedimiento Incremental.....	146
CAPÍTULO 6: ANALISIS NUMERICO	
6.1 Análisis Elástico del Pull-out test.....	150
6.1.1 Resultados Obtenidos.....	154
6.1.2 Análisis y Comparación de Resultados.....	161
6.2 Análisis Elastoplástico del Pull-out test.....	166
6.2.1 Resultados Obtenidos.....	167
6.2.1a Análisis con resistencia del Hormigón, f'_c , de 30 MPa.....	167
6.2.1a.1 Carga Ultima y Deplazamiento Máximo.....	167
6.2.1a.2 Resultados Gráficos Representativos.....	174
6.2.1b Análisis Comparativo para Resistencias del Hormigón, $f'_c=30$ y $f'_c=23$	184
6.2.2 Análisis y Comparación de Resultados.....	187
CAPÍTULO 7: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	
7.1 Introducción.....	192
7.2 Conclusiones.....	192
7.3 Recomendaciones para Trabajos Futuros.....	195
APENDICE Y BIBLIOGRAFIA	
Analogía con el Problema de Flexión en Vigas.....	I
BIBLIOGRAFIA.....	VII

SUMARIO

En *CAPITULO 1* se realiza la descripción del problema analizado y se detallan objetivos y alcance del presente trabajo de tesis.

En *CAPITULO 2* se presenta la revisión bibliográfica sobre el tema, detallándose antecedentes sobre estudios teóricos, numéricos y experimentales.

En *CAPITULO 3* se realiza una revisión sobre los Fundamentos de la Elasticidad constituyendo el marco teórico, de importancia para el desarrollo de los temas centrales abordados en la presente tesis.

En *CAPITULO 4* se realiza una revisión de los Modelos o Teorías Constitutivas para sólidos, haciendo especial hincapié en las Teorías de la Elasticidad y del Flujo de la Plasticidad que se utilizan en esta tesis.

En *CAPITULO 5* se realiza una descripción sintética del Método de los Elementos Finitos utilizado en el presente trabajo y de los pasos necesarios para su implementación computacional.

En *CAPITULO 6* se presentan los diferentes modelos estudiados a través del Análisis Numérico. Posteriormente, se realiza el análisis y comparación de los resultados obtenidos con los reportados en la bibliografía consultada.

En *CAPITULO 7* se presentan las conclusiones y las recomendaciones para futuras investigaciones.

En *APENDICE Y BIBLIOGRAFIA* se realiza la analogía del problema en estudio con el de flexión en vigas y se indica la bibliografía consultada para el presente trabajo.

LISTADO DE FIGURAS

- Figura 1.1: Configuración del Ensayo de Extracción
- Figura 2.1: Modos de falla de anclajes sometidos a tracción
- Figura 2.2: Denominación de los parámetros geométricos del sistema
- Figura 2.3: Representación esquemática del modo de falla cónica
- Figura 2.4: Curvas Carga Última Vs. Resistencia del Hormigón
- Figura 2.5: Curvas Carga Última Vs. Profundidad del Inserto
- Figura 2.6: Parámetros geométricos del sistema en estado plano de tensiones
- Figura 2.7: Sistema a analizar en estado axialsimétrico de tensiones
- Figura 3.1.1: Elemento de volumen en las proximidades de un punto
- Figura 3.1.2: Medio continuo sometido a f_i y b_i
- Figura 3.1.3: Vector tensión $t_i^{(n)}$
- Figura 3.1.4: Estado de tensión en un punto
- Figura 3.1.5: Estado de tensión en un punto
- Figura 3.1.6: Tensor de tensión
- Figura 3.1.7: Tetraedro elemental con vértice en el punto P
- Figura 3.1.8: Volumen arbitrario V de un medio continuo
- Figura 3.1.9: Sistemas de coordenadas $Px_1x_2x_3$ y $Px'_1x'_2x'_3$
- Figura 3.1.10: Dirección de colinealidad entre $t_i^{(n)}$ y n_i
- Figura 3.1.11: Espacio de tensiones principales
- Figura 3.1.12: Descomposición del vector de tensión
- Figura 3.1.13: Círculos de tensión de Mohr
- Figura 3.1.14: Construcción del círculo de Mohr
- Figura 3.2.1: Configuración no deformada y deformada de un medio continuo
- Figura 3.2.2: Configuraciones inicial y final referidas a $Ox_1x_2x_3$, y $ox_1x_2x_3$
- Figura 3.2.3: Vectores desplazamiento de dos partículas vecinas
- Figura 3.2.4: Elemento diferencial de línea $PoQo$
- Figura 3.2.5: Deformación de $PoQo$ y $PoMo$
- Figura 3.2.6: Transformación de los sistemas de ejes coordenados
- Figura 3.2.7: Cuádricas de deformación lagrangiana y euleriana

- Figura 3.2.8: Cambio de volumen de un paralelepípedo rectangular
- Figura 3.2.9: Círculos de Mohr para tensión plana
- Figura 4.3.2.1: Comportamiento elastoplástico general
- Figura 4.3.2.2: Diagramas Tensión-Deformación ideales
- Figura 4.3.2.3: Representación deviatorica de los criterios de Von Mises y Tresca
- Figura 4.3.2.4: Representación hidrostática del criterio de Von Mises
- Figura 4.3.2.5: Representación del criterio de Von Mises para Compresión biaxial
- Figura 4.3.2.6: Representación, en el espacio de tensiones principales, de los criterios de fluencia de Mohr-Coulomb y Drucker-Prager
- Figura 5.2.1: Discretización de una estructura en elementos triangulares de deformación constante. Variables nodales
- Figura 5.2.2: Funciones de forma del elemento triangular de tres nodos
- Figura 5.2.3: Fuerzas sobre un elemento triangular de tres nodos
- Figura 5.2.4: Discretización de una viga pared con elementos rectangulares de cuatro nodos. Definición de ejes locales r y s
- Figura 5.3.1: Esquema del proceso de solución iterativo-incremental
- Figura 6.1.1: Geometría y Malla de Elementos Finitos correspondiente a Modelo 1
- Figura 6.1.2.a: Geometría de Modelos 1, 2, 3 y 4
- Figura 6.1.2 b: Geometría correspondiente a Modelo 5
- Figura 6.1.3 a: Curvas de iguales deformaciones máximas principales
- Figura 6.1.3 b: Curvas de iguales tensiones máximas principales
- Figura 6.1.3 c: Curvas de iguales tensiones mínimas principales
- Figura 6.1.4 a: Curvas de iguales tensiones mínimas principales
- Figura 6.1.4 b: Curvas de iguales tensiones máximas principales
- Figura 6.1.4 c: Curvas de iguales deformaciones máximas principales.
- Figura 6.1.5 a: Curvas de iguales tensiones mínimas principales
- Figura 6.1.5 b: Curvas de iguales tensiones máximas principales
- Figura 6.1.5 c: Curvas de iguales deformaciones máximas principales
- Figura 6.1.6: Deformada correspondiente a Modelo 1
- Figura 6.2.1: Materialización de la acción sobre el hormigón
- Figura 6.2.2 Curva de respuesta del modelo de Von Mises para carga uniaxial

Figura 6.2.3: Curva de respuesta del modelo de Drucker-Prager para carga uniaxial

Figura 6.2.4a: Comportamiento Carga-Desplazamiento del modelo Drucker-Prager en estado axialsimétrico

Figura 6.2.4b: Comportamiento Carga-Desplazamiento del modelo Von Mises en estado axialsimétrico

Figura 6.2.5a: Comportamiento Carga-Desplazamiento del modelo Drucker-Prager en estado plano de tensiones

Figura 6.2.5b: Comportamiento Carga-Desplazamiento del modelo Von Mises en estado plano de tensiones

Figura 6.2.6: Deformada correspondiente a Modelo 2 para estado plano de tensiones

Figura 6.2.7: Curvas de distribución de tensiones mínimas principales del Modelo 2 en estado axialsimétrico.

Figura 6.2.8: Curvas de distribución de tensiones máximas principales para la carga máxima, en el caso de Modelo 2 para estado axialsimétrico.

Figura 6.2.9: Curvas de distribución de tensiones máximas principales para el primer paso de desplazamiento, en el caso de Modelo 2 en estado axialsimétrico

Figura 6.2.10: Curvas de distribución de tensiones máximas principales del Modelo 1 en estado axialsimétrico

Figura 6.2.11: Curvas de distribución de tensiones mínimas principales del Modelo 1 en estado axialsimétrico

Figura 6.2.12: Curvas de distribución de tensiones máximas principales del Modelo 5 en estado plano de tensiones.

Figura 6.2.13: Curvas de distribución de tensiones mínimas principales del Modelo 5 en estado plano de tensiones.

Figura 6.2.14: Curvas de distribución de tensiones mínimas principales para el 10 % de la carga última del Modelo 2 en estado plano de tensiones

Figura 6.2.15: Curvas de distribución de tensiones mínimas principales correspondiente al 50 % de la carga última del Modelo 2 en estado plano de tensiones

Figura 6.2.16: Curvas de distribución de tensiones mínimas principales correspondiente a la carga última del Modelo 2 en estado plano de tensiones

Figura 6.2.17: Curvas de distribución de tensiones máximas principales para el 10 % de la carga última del Modelo 2 en estado plano de tensiones.

Figura 6.2.18: Curvas de distribución de tensiones máximas principales para el 50 % de la carga última del Modelo 2 en estado plano de tensiones.

Figura 6.2.19: Curvas de distribución de tensiones máximas principales correspondiente a la carga última del Modelo 2 en estado plano de tensiones.

Figura 6.2.20: Curvas de distribución de deformaciones principales para el 10 % de la carga última del Modelo 2 en estado plano de tensiones.

Figura 6.2.21: Curvas de distribución de deformaciones máximas principales para el 50% de la carga última del Modelo 2 en estado plano de tensiones.

Figura 6.2.22: Curvas de distribución de deformaciones máximas principales para la carga última del Modelo 2 en estado plano de tensiones.

Figura 6.2.23: Comportamiento Carga-Desplazamiento para las dos calidades de hormigón analizadas con el modelo de Drucker Prager en estado plano de tensiones

6.2.24: Comportamiento Carga-Desplazamiento para las dos calidades de hormigón analizadas con el modelo de Von Mises en estado plano de tensiones

6.2.25: Comportamiento Carga-Desplazamiento para las dos calidades de hormigón analizadas con el modelo de Drucker-Prager en estado axialsimétrico

6.2.26: Comportamiento Carga-Desplazamiento para las dos calidades de hormigón analizadas con el modelo de Von Mises en estado axialsimétrico.

Figura A-1: Distribución de tensiones Mínimas Principales en Viga 1 correspondiente a esbeltez $l/l_0=4$

Figura A-2: Distribución de Tensiones Máximas Principales en Viga 1 correspondiente a esbeltez $l/l_0=4$

Figura A-3: Distribución de Tensiones Mínimas Principales en Viga 2 correspondiente a esbeltez $l/l_0=3$

Figura A-4: Distribución de Tensiones Máximas Principales en Viga 2 correspondiente a esbeltez $l/l_0=3$

Figura A-5: Distribución de Tensiones Mínimas Principales en Viga 3 correspondiente a esbeltez $l/l_0=2$

Figura A-6: Distribución de Tensiones Máximas Principales en Viga 3 correspondiente a esbeltez $l/l_0=2$

Figura A-7: Distribución de Tensiones Mínimas Principales en Viga 4 correspondiente a esbeltez $l/l_d=1$

Figura A-8: Distribución de Tensiones Máximas Principales en Viga 4 correspondiente a esbeltez $l/l_d=1$

LISTADO DE TABLAS

II.1 Ecuaciones de Predicción de P_u

II.2 Resultados para Estado Plano de Tensiones

II.3 Resultados para Estado Axialsimétrico

II.4 Carga Última y Tipo de Falla para los Ensayos Experimentales de Barr et al

VI.1.1: Problemas Axialsimétricos

VI.1.2: Problemas en Tensiones Planas

VI.1.3: Problemas en Deformaciones Planas

VI.2.1: Valores σ -E de la curva de respuesta σ - ϵ del modelo de Von Mises

VI.2.2: Carga última y desplazamiento máximo correspondiente al estado Axialsimétrico

VI.2.3: Carga última y desplazamiento máximo correspondiente a los problemas en estado Plano de Tensiones

VI.2.4: Carga última y desplazamiento máximo correspondiente a los problemas en estado Plano de Deformaciones

CAPITULO 1
INTRODUCCION

CAPITULO 1

INTRODUCCION

1.1 DESCRIPCION DEL PROBLEMA EN ESTUDIO

Los sistemas de pernos anclados en hormigón se presentan con asiduidad en la práctica de la Ingeniería Estructural, tal es el caso de sistemas prefabricados, construcciones nucleares, sistemas de amarre contraviento, fundaciones de máquinas, fundaciones de estructuras, elementos no estructurales colgantes, anclajes, uniones de componentes de viviendas y de estructuras prefabricadas, reparación y refuerzo de estructuras existentes, etc. Particularmente, en la evaluación de estructuras de hormigón se utilizan como método no destructivo para determinar in situ la resistencia del hormigón.

A pesar de los innumerables ejemplos de pernos anclados en materiales cohesivos sometidos a tracción no se logró hasta el presente un conocimiento acabado o, mejor dicho, un criterio unificado, sobre el mecanismo de comportamiento y falla de los mismos bajo cargas estáticas o dinámicas. La falta de dicha unicidad de criterios se observa, además, en las discusiones referentes al tipo de resistencia del hormigón que efectivamente se mide con el ensayo de pernos anclados en hormigón: la de tracción, la de compresión, o la de corte. También respecto de la influencia de parámetros geométricos del sistema en la ductilidad y capacidad del ensayo de extracción.

Dada la gran utilidad, el estudio del comportamiento de falla de pernos anclados en hormigón se constituye en uno de los temas de actualidad, sobre todo en lo referente a la determinación precisa de la carga última de diseño.

De acuerdo a lo antes indicado los sistemas de pernos anclados en hormigón constituyen un atractivo problema de estudio.

En el presente trabajo de tesis se particularizará el estudio al *Ensayo de Extracción* de pernos metálicos con cabeza anclados en hormigón que se detalla a continuación.

1.1.1 EL ENSAYO DE EXTRACCION PARA LA EVALUACION DE LA RESISTENCIA DEL HORMIGON

En muchas ocasiones, se presenta la necesidad de determinar ciertas características y condiciones del hormigón en servicio. La valoración “in situ” de la calidad del hormigón cobra importancia en aquellas ocasiones en que es necesario evaluar estructuras de hormigón que presentan ciertas anomalías visibles como por ejemplo agrietamientos, ataques químicos, etc., como también cuando existan dudas respecto a la capacidad para soportar cargas, fundamentalmente en aquellos casos en los cuales se cambia el destino de la misma. Por otro lado, dado el uso recurrente de pernos anclados en hormigón es necesario poder predecir con precisión la capacidad de los mismos frente a fuerzas de extracción.

La evaluación del hormigón endurecido de estructuras construidas o en etapa de construcción, se efectúa mediante la valoración de su resistencia a compresión, denominada “resistencia efectiva”, ya que en forma directa o inversa refleja la mayoría de las otras propiedades del material.

Tradicionalmente, la evaluación de la “resistencia efectiva” se realiza mediante ensayos sobre muestras extraídas de la propia estructura. Esta tarea muchas veces es impracticable por razones de tiempo, por razones económicas o técnicas. Más aún existen casos particulares, como el hormigón gunitado en el cual no es posible el ensayo en probetas, según el método convencional, convirtiéndose el ensayo de extracción en una alternativa válida y excluyente.

Es por ello, que se recurre cada vez con mayor frecuencia y desde hace varias décadas a la utilización de los Ensayos No Destructivos (END), con el fin de evaluar la calidad del hormigón “in situ”. Mediante los mismos se pueden determinar distintas características del hormigón sin provocar daños o destrucción significativos del elemento en estudio.

Debe quedar claro, sin embargo, que mediante los END disponibles en la actualidad, no pueden obtenerse valores absolutos de resistencia, la que solo

puede determinarse cargando muestras hasta su falla o destrucción. No obstante, se puede determinar la resistencia buscada mediante una correlación con el parámetro medido.

La clasificación de los END puede realizarse desde dos puntos de vista, uno en función del tipo de característica que evalúa el ensayo y otro de acuerdo a la alteración que puede originar su aplicación. De esta forma se pueden diferenciar a los END considerados en netamente “no destructivos” y en “semidestructivos” que son aquellos que producen una pequeña destrucción superficial del material. De todos modos, a ambos ensayos se los agrupa, cuando se desea evaluar la calidad del hormigón de una estructura, en los No Destructivos.

El *Ensayo de Extracción* es un método de arrancamiento que se encuentra dentro de los métodos semidestructivos. Fue propuesto en Rusia por Skramatajew, B., (1938), y modificado varias veces hasta que un detallado y extenso estudio experimental llevado a cabo por Kierkegaard-Hansen, P., (1975) permitió definir la configuración más conveniente en la cual se introdujo un anillo de reacción al ensayo axialsimétrico de extracción en hormigón tal como se observa en la Figura 1.1. El ensayo consiste en determinar la fuerza necesaria para desprender y arrancar del hormigón endurecido, un inserto de forma y dimensiones establecidas. El inserto es una barra de acero de alta resistencia de diámetro d y longitud l_d con cabeza de diámetro D .

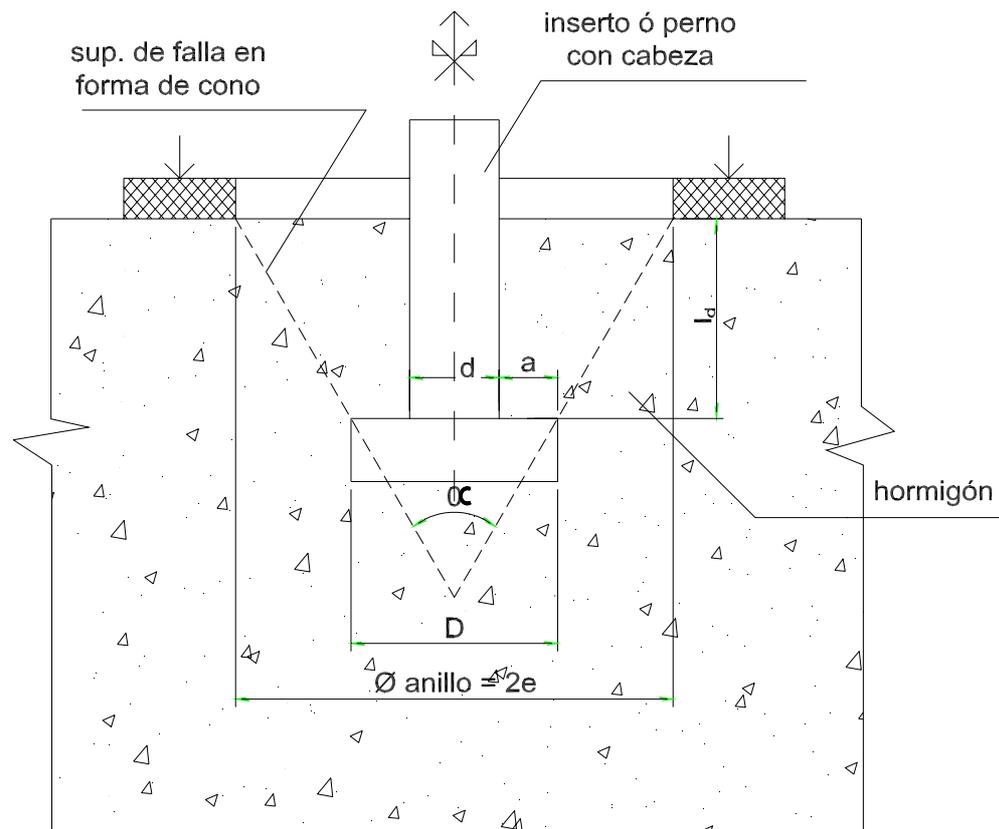


Figura 1.1: Configuración del Ensayo de Extracción

A pesar que el ensayo de extracción obtuvo rápidamente una gran aceptación por su simpleza y bajo costo, se desarrolló paralelamente una fuerte controversia acerca de su mecanismo de falla.

Con el propósito de dar respuesta a este interrogante se llevaron a cabo en el mundo entero programas de investigación experimentales y numéricos. Prueba de ello, es la invitación que RILEM TC 90-FMA, (1991) realizó a la comunidad científica experimental y teórico-numérica, a efectos de dilucidar el problema mecánico involucrado en el *pull-out test* como se denomina al *Ensayo de Extracción* en la literatura inglesa.

No obstante, hasta el presente no se ha logrado un conocimiento acabado sobre el mecanismo de comportamiento y falla de dichos sistemas bajo cargas estáticas o dinámicas.

1.2 OBJETIVOS Y ALCANCE DE LA TESIS

El objetivo general del presente trabajo es, a través de la simulación numérico-computacional, analizar las predicciones elásticas y elastoplásticas bajo estados tensionales planos, del mecanismo de respuesta de sistemas estructurales constituidos por pernos metálicos con cabeza anclados en hormigón y sometidos a fuerza de extracción. En particular, se analizará la influencia de la geometría y de la ley constitutiva disipativa o no disipativa considerada, en las predicciones computacionales de falla del *pull-out test*.

Para alcanzar el objetivo general, se pretende también, por extrapolación, hechar luz sobre una de las incógnitas más relevantes que plantean estos mecanismos estructurales, esto es, analizar la influencia del parámetro material más representativo del hormigón, la resistencia a compresión uniaxial, en la carga última de extracción de pernos anclados en hormigón. Estos estudios permitirán definir más detalladamente la viabilidad del *Ensayo de Extracción en Hormigón*, el cual fue propuesto para medir la resistencia del hormigón. Los resultados obtenidos se comparan con los reportados en la bibliografía.

La investigación permitirá ahondar en teorías de gran relevancia en la Mecánica Estructural como es la Teoría del Flujo de la Plasticidad y otras relacionadas con la aplicación no lineal del Método de los Elementos Finitos.

CAPITULO 2
ANTECEDENTES

CAPITULO 2

ANTECEDENTES

2.1 INTRODUCCION

Numerosos estudios apuntan a encontrar una metodología de diseño adecuada para resolver el problema en cuestión, sobre la cual no existe aún acuerdo dado los innumerables factores que influyen el mecanismo de falla que se desarrolla en el *Ensayo de Extracción* de pernos anclados en hormigón. Este mecanismo, que en condiciones normales corresponde a un comportamiento frágil cambia sustancialmente en virtud de las particulares condiciones geométricas, de borde y de carga existentes (Sfer et al, 1998)

La capacidad última de corte y tracción de los anclajes está influenciada por uno ó más de los siguientes factores: geometría de la configuración del ensayo, resistencia a compresión uniaxial y/o a tracción uniaxial del hormigón, tipo de agregado. Por otro lado, y como es de suponer afecta también la capacidad de tracción el hecho que el anclaje se localice en la zona de tracción o compresión del miembro estructural.

La capacidad máxima de tracción de anclajes instalados en la zona de tracción puede ser afectada por fisuras en el área del anclaje, lo cual debería ser tomado en cuenta en la determinación de la capacidad de carga del anclaje en hormigón.

Los factores antes mencionados influyen el modo de falla de anclajes sometidos a cargas de tracción. Los modos de falla que se pueden presentar según Walther et al, (1991) son: falla cónica del hormigón, falla breakout, falla por splitting del elemento estructural, falla blow-out del hormigón, falla del acero, falla por deslizamiento, falla por adherencia, esta última es común en anclajes químicos y grout.

A continuación se describen cada uno de los modos de fallas enunciados

Cono de falla de hormigón (Figura 2.1a): El hormigón falla en tracción creando un cono. Este tipo de falla ocurre generalmente cuando los anclajes son hechos con aceros de alta resistencia ó para anclajes ubicados con poca profundidad de embebido, caso típico del *Ensayo de Extracción ó pull-out test*. También es común el cono de falla para grupos de anclajes ó anclajes individuales instalados cerca de un borde del sistema estructural. El cono generalmente comienza en el borde externo de la cabeza del anclaje y se propaga hasta la superficie del hormigón con un ángulo de entre 30 y 45° con respecto a la superficie horizontal. La profundidad del anclaje también tiene efecto sobre la forma del cono el cual varía el ángulo de inclinación con la variación de la profundidad embebida. Un cono con un ángulo de inclinación de 45° es generalmente aceptado en EEUU para la estimación de la resistencia pull-out del anclaje.

Falla breakout (Figura 2.1b): Este tipo de falla ocurre generalmente cuando los anclajes son instalados cerca de un borde ó esquina.

Falla del hormigón por resquebrajamiento del miembro estructural ó splitting (Figura 2.1c): Este tipo de falla es común en anclajes instalados en losas y vigas finas ó en esquinas. En este modo de falla el hormigón de losas ó vigas falla en flexión. La capacidad del anclaje es más grande que la carga causante de la falla en flexión del elemento estructural.

Falla de acero (Figura 2.1d): En este caso el hormigón no falla produciéndose la falla del acero cuando éste llega a su máxima capacidad de tracción. Generalmente ocurre en anclajes instalados con profundidades embebidas de nueve veces el diámetro ó más.

Falla blow-out (Figura 2.1e): La falla lateral blow-out es causada por la presión cuasi-hidroestática en el área de la cabeza, la cual produce una fuerza lateral que causa la falla por formación de un cono lateral en el área de la cabeza del anclaje. Eso ocurre solo para pequeñas distancias al borde.

Falla por deslizamiento: En este caso el hormigón en contacto con la porción de cabeza del anclaje ó con el cuerpo de un anclaje falla en compresión permitiendo que el anclaje se arranque del orificio.

Falla por adherencia: Esta falla es común en anclajes químicos y grout, es usualmente acompañada por un pequeño cono de hormigón de profundidad aproximadamente la mitad de del perno embebido.

En Figura 2.1 se observan algunos de los modos de falla antes enunciados.

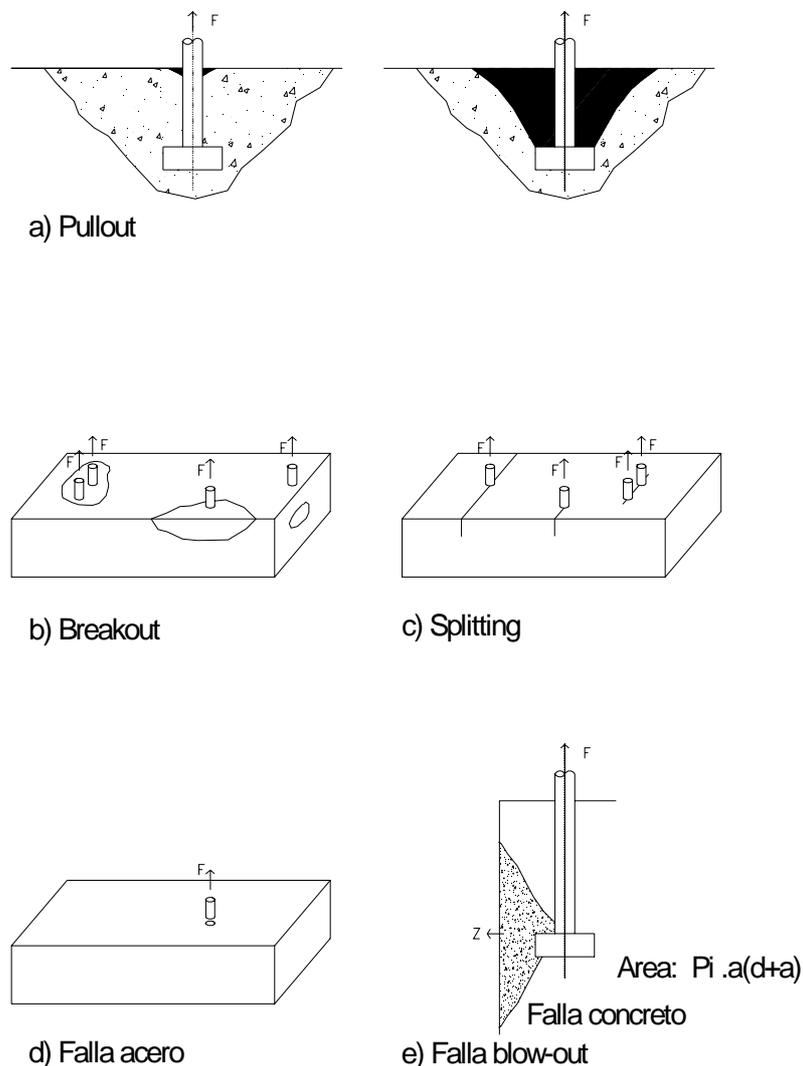


Figura 2.1: Modos de falla de anclajes sometidos a tracción.

El *pull-out test*, con condiciones geométricas particulares, es también utilizado para la determinación de la adherencia de armaduras. Este ensayo, normalizado, sufrió modificaciones en su geometría en 1983 respecto a la versión 1978. Esta modificación fue realizada por la Comisión VII “Reinforcement: Technology and Quality Control” del CEB, de acuerdo con RILEM (Reunión Internacional des Laboratories d’Essais de Materiaux) y se refirió a las dimensiones del bloque de ensayo para las armaduras de diámetros menores e iguales que 16 mm. Esto demuestra la influencia de la geometría en la capacidad de los anclajes y por ende en el mecanismo de falla, dado que antes de la modificación se producían fallas por hendimiento (splitting) que se pretendieron evitar con la modificación según Delibes Liniers et al, (1985)

La influencia de la disposición con respecto al borde del anclaje ha sido muy estudiada existiendo muchos estudios que dan formulaciones empíricas para la determinación de la distancia al borde crítica a la cual se produce un cambio en el modo de falla, algunos de esos estudios se indican a continuación

Para Furche y Elinghausen (1991) existe una distancia crítica al borde (m_c) a la cual el modo de falla cambia de estallido lateral (blow-out) a falla cónica de hormigón, que depende de la profundidad embebida (l_d) y del área de apoyo de la carga (A_b). Esta distancia crítica está dada por la siguiente expresión

$$m_c = \frac{0.3l_d}{\left(\sqrt{\left(\frac{A_b}{l_d} \right) - 0.5} \right)} \quad (2.1)$$

En Figura 2.2 se observan los parámetros geométricos que influyen el modo de falla

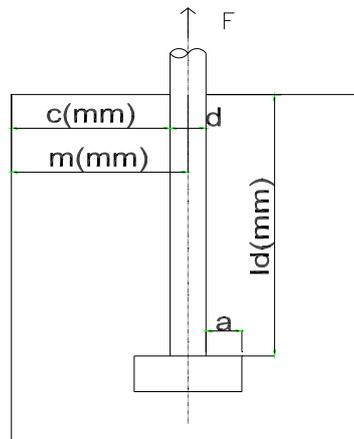


Figura 2.2: Denominación de los parámetros geométricos del sistema

Si se verifica que la distancia al borde $m < m_c$ entonces ocurrirá falla blow-out.

Si se verifica que la distancia al borde $m > m_c$ entonces ocurrirá falla cónica.

No puede darse una relación m/l_d constante para el cambio de modo de falla dado que también influye en la distancia crítica, m_c , el A_b . Prácticamente podría decirse que el valor crítico oscila entre 0.2 y 0.4.

Los mismos autores dan la distancia crítica al borde para la cual el modo de falla cambia de blow-out a rotura del acero, para una relación recomendada por ACI 349-85, ACI Committee 349, (1985) $A_b \geq 1.5 A_s$,

donde

$$m_s = \frac{f_{ur} \cdot d}{(23.2 \sqrt{f'c})} \quad (2.2)$$

Esta ecuación se basa en la carga de falla promedio, si se considera un factor de seguridad usando el fractil 5% de los resultados de los ensayos y aplicando un factor de reducción de la resistencia $\phi=0.85$ como propone ACI 349-85, ACI Committee 349, (1985) dicha ecuación se transforma en

$$m_s = \frac{f_{ut} \cdot d}{(15.7 \cdot \sqrt{f'c})} \quad (2.3)$$

siendo

d = diámetro del perno

m_s = distancia al borde a la cual el modo de falla cambia de blow-out a rotura del acero en [mm]

f_{ut} = resistencia a tracción del acero [N/mm²]

A_b = Area de apoyo de la cabeza del perno sobre el hormigón

A_s = Area de la barra [mm²] = $\pi d^2/4$

Para Wiewel, (1991) existe una gran variación en la información publicada, en cuanto a la capacidad de carga de anclajes similares instalados en hormigón de la misma resistencia producidos por distintos fabricantes, lo cual desconcierta al diseñador que tiene que elegir el anclaje adecuado para determinada aplicación. Esto se explica por la gran cantidad de factores (mecánicos y geométricos) que influyen en este tipo de ensayo.

Las investigaciones realizadas hasta el presente permiten hacer la siguiente clasificación en los métodos de diseño, Wiewel, (1991)

“Método de la tensión de diseño” y “Método de la resistencia de diseño”.

En el *Método de la Tensión de Diseño*, el diseñador utiliza datos provistos por el fabricante de anclajes o datos publicados por distintas organizaciones.

El *Método de la Resistencia de Diseño* es un método analítico aproximado que utiliza ecuaciones de predicción. Para ello las investigaciones realizadas sobre el tema han arrojado numerosas ecuaciones como se detalla en el siguiente punto.

Cualquiera sea el método de diseño adoptado, Wiewel recomienda que los anclajes sean evaluados de acuerdo al tipo, tamaño y resistencia del hormigón. Además, según dicho autor, deberá tenerse en cuenta si se lo instalará en zona

de tracción ó de compresión del elemento estructural a evaluar a fin de prever ó no fisuración en el hormigón. Los reglamentos recomiendan el uso de un coeficiente de seguridad adecuado a fin de calcular la carga de trabajo permitida.

2.2 ESTUDIOS ANALITICOS, NUMERICOS Y EXPERIMENTALES

ECUACIONES DE PREDICCIÓN DE LA CAPACIDAD DE TRACCIÓN ÚLTIMA PARA ANCLAJES FALLANDO POR FORMACIÓN DE UN CONO DE HORMIGON.

A fin de estudiar, por extrapolación la viabilidad del *Ensayo de Extracción en Hormigón (pullout test)* para medir la resistencia del hormigón se limita el presente trabajo a analizar la capacidad de tracción de los anclajes fallando por formación de un cono de concreto.

Walther, et al, (1991) realizaron la comparación de nueve ecuaciones de predicción propuestas para medir la capacidad de anclajes traccionados que fallan por formación de un cono de hormigón.

Descripción del cono de falla: Cuando un anclaje es cargado en tracción la carga es transmitida a través de todo el cuerpo del anclaje por un mecanismo de expansión del anclaje. El mecanismo de expansión es normalmente localizado cerca del extremo del anclaje desarrollándose una fuerza lateral normal a la pared del agujero, esta fuerza normal es necesaria para el desarrollo de una resistencia friccional de la carga aplicada. Existen otras fuerzas entre el agujero perforado y el anclaje que usualmente son ignorados. Cuando la fuerza de tracción sobre el anclaje aumenta se desarrolla una superficie de tensiones de tracciones principales dentro del hormigón radiando desde el mecanismo de expansión hacia la superficie libre del hormigón. El ángulo medido desde el eje longitudinal del anclaje define la orientación de la superficie de tensión principal de tracción y oscila entre 45° y 60°. Este ángulo tiende a aumentar con el aumento de la profundidad del inserto.

Eventualmente, la tensión de tracción sobre esta superficie excede la resistencia a tracción del material y se produce la extracción de un cono de hormigón. Una representación esquemática del cono de falla se muestra en Figura 2.3

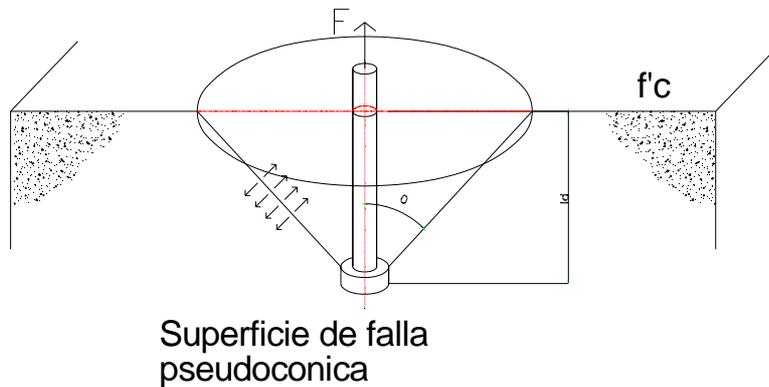


Figura 2.3: Representación esquemática del modo de falla cónica

A continuación se dan las nueve ecuaciones empíricas de predicción de la capacidad de carga de anclajes que fallan por formación de un cono de hormigón según los distintos autores.

Tabla II-1: Ecuaciones de Predicción de P_u

Notación	Autor	Ecuación de Predicción
ACI-PCI	ACI,Comm.349 Shaikh & Yi (PCI)	$4\pi l_d^2 \sqrt{f'_c}$
BRA	Braestrup, et al.	$0.31 l_d^2 f'_c$
ELG	Eligehausen	$8.7 l_d^{1.54} f_c^{2/3}$
EFM	Eligehausen, et al.	$35.8 l_d^{1.5} \sqrt{f'_c}$
P-W	Pussill-Wachtsmuth	$3.84 l_d^2 f_c^{2/3}$
B&R	Bode & Roik	$28.7 l_d^{1.5} \sqrt{f'_c}$
SCH	Schwarz	$22.2(l_d')^2 \sqrt{f'_c}$
CAN	Cannon	$4\pi(l_d \tan \theta)^2 \sqrt{f'_c}$

Siendo en la ecuación de Schwarz $l_d' = l_d - 1\phi$

En la ecuación de Cannon para $l_d < 7.5$ cm entonces resulta $\theta = 62 - 1.11 l_d^2$

para $3'' \leq l_d < 6''$ entonces resulta $\theta = 45 + 0.79 (6 - l_d)^2$

para $l_d \geq 15$ cm entonces resulta $\theta = 45^\circ$

En el Figura 2.4 se comparan las ecuaciones de predicción para resistencias de hormigón entre 1000 y 8000 *libras/pulgadas*² [psi] y $l_d = 5.9$ *pulgadas* [in].

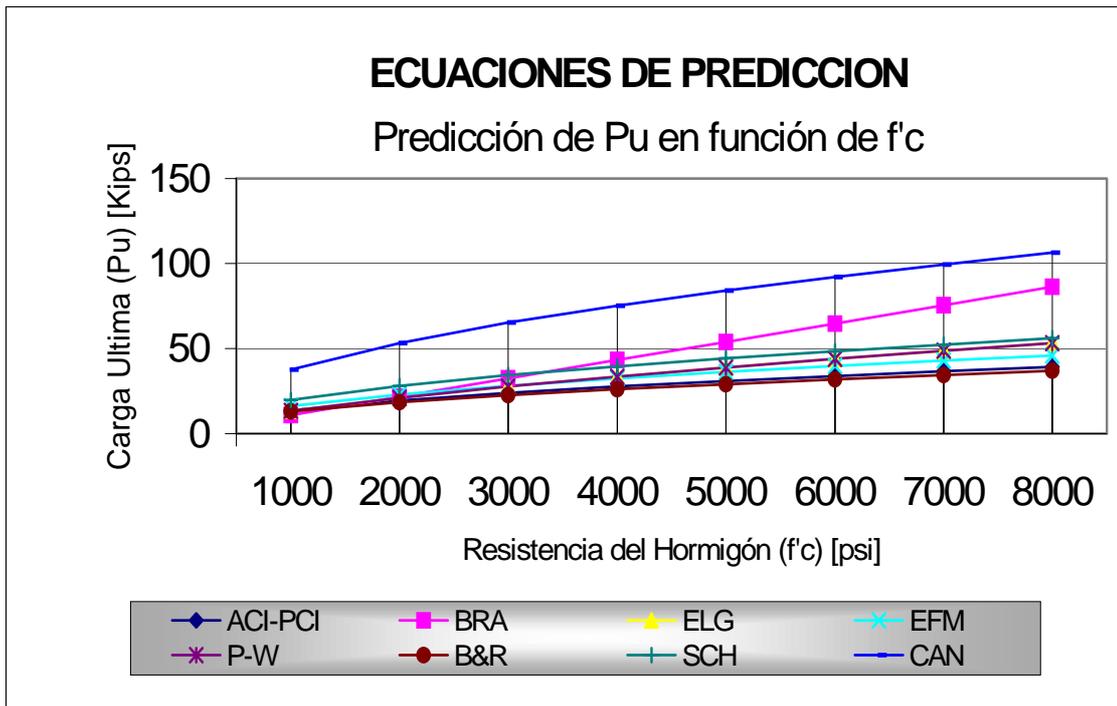


Figura 2.4: Curvas Carga Ultima Vs. Resistencia del Hormigón

En el Figura 2.5 se comparan las distintas ecuaciones empíricas de predicción para $f'_c = 4000$ libras/pulgadas² y l_d variando entre 1 y 10 pulgadas.

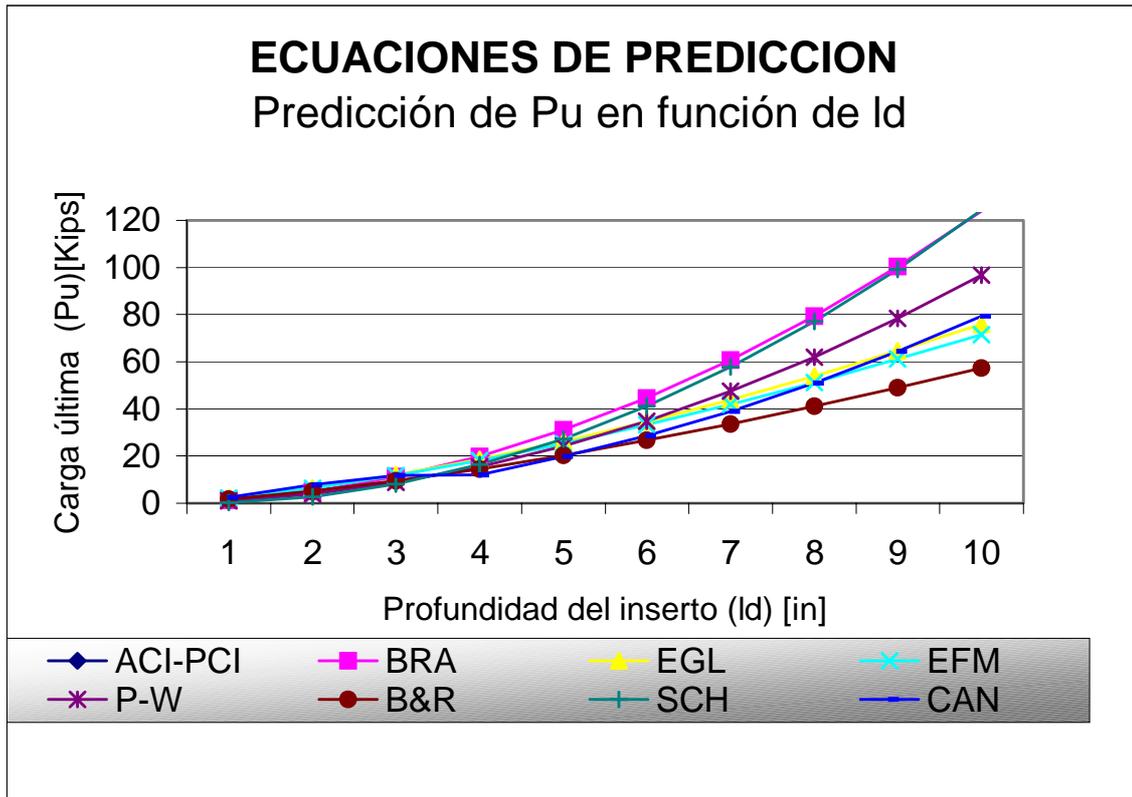


Figura 2-5: Curvas Carga Ultima Vs. Profundidad del Inserto

Walther et al, (1991) utilizaron, para evaluar la seguridad de las ecuaciones indicadas, una base de datos consistente en el resultado de 927 ensayos realizados variando el rango de profundidad del inserto entre 1 a 8 pulgadas, la relación entre l_d/d entre 1.5 a 8 y la resistencia del hormigón a compresión entre 1500 a 7200 libras/pulgadas².

Esta evaluación les permitió observar que la ecuación de Bode y Roik es la que mejor predice el resultado de los 927 ensayos usados para testear la propuesta de los autores indicados en el citado trabajo.

Asimismo, de Figura 2.4 se desprende que para los valores de resistencias más altos las ecuaciones propuestas sobreestiman el valor de la carga última. En Figura 2.5, se puede observar que para los valores más bajos de l_d las predicciones subestiman la carga última y para los más altos la sobreestiman.

Por otro lado, a fin de comparar diferentes métodos analíticos y numéricos RILEM TC 90-FRACTURE MECHANICS OF CONCRETE- APPLICATIONS RILEM TC 90 FMA, (1991) realizó una invitación para el análisis de un

problema estructural común. Este problema fue el de un perno anclado en un bloque de hormigón sometido a tracción (*pull-out test*) para lo cual propuso la geometría y variantes de ella, condiciones de borde y propiedades de los materiales con el objetivo de unificar el análisis para la obtención de la capacidad, la curva tensión-deformación en estado plano de tensiones y axialsimétrico y el mecanismo de falla del ensayo.

El planteo del problema, de acuerdo a Figuras 2.4 y 2.5, en la invitación mencionada fue el siguiente

Analizar y/o ensayar uno o ambos de los siguientes dos problemas, dando (como mínimo) los siguientes resultados:

- Descripción del modelo de análisis y/o método de ensayo.*
- Resistencia máxima o Carga pico.*
- Desplazamiento en el borde superior del anclaje (punto A de la figura) correspondiente a la carga pico.*
- Mecanismo de falla.*

Problema 1:

Estado plano de tensiones

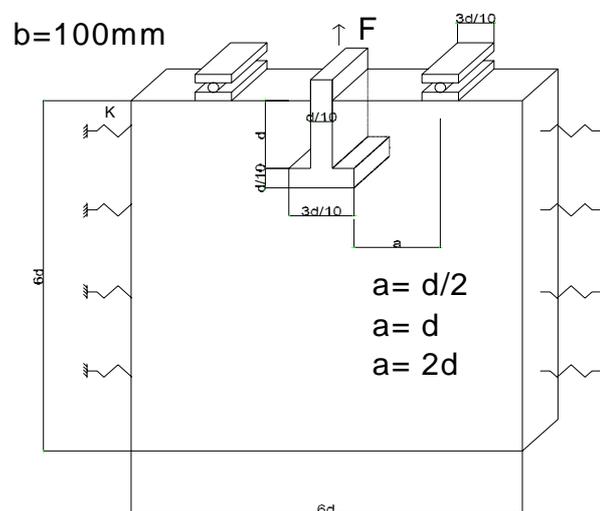


Figura 2.6: Parámetros geométricos del sistema en estado plano de tensiones

En la tabla siguiente se da la variación de parámetros recomendada

$K=0$

$K=\infty$

d=	50	150	450	d=150
a=d/2		X		
a=d		X		X
a=2d	X	⊗	X	X

En el caso de analizar una sola alternativa elegir ⊗

Problema 2:

Estado axialsimétrico de tensiones

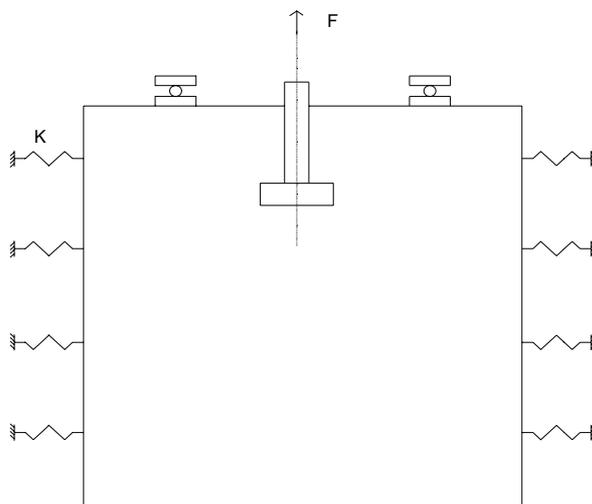


Figura 2.7: Sistema a analizar en estado axialsimétrico de tensiones

En la tabla siguiente se da la variación de parámetros recomendada.

K=0	K=∞			
d=	150	d=50	150	450
a=d/2			X	
a=d	X		X	
a=2d		X	⊗	X

En el caso de analizar una sola alternativa elegir ⊗

Cabe acotar que la nomenclatura de RILEM en lo que se refiere a los parámetros geométricos del problema en estudio difieren de los utilizados en el presente trabajo y que se corresponden con las siguientes definiciones

a[mm]: distancia del eje del perno al eje del apoyo

d [mm]: profundidad del perno embebida hasta la parte superior de la cabeza

\varnothing [mm]: diámetro del perno anclado

En las Tablas II-2 y II-3 siguientes se transcribe el resumen de los resultados de los distintos autores que respondieron a la invitación, para los dos problemas planteados.

Tabla II.2: Resultados para estado plano de tensiones

RILEM TC 90-FMA

PLANE STRESSES-RESUMEN DE RESULTADOS May 1991

Round Robin Analysis of Anchors Bolts $f_t=3$ MPa, $G_{II}=100$ Nm/m²

Fmáx en kN/m=N/mm

Analizer/Tester	K=0										K=∞	
	d=50		d=150			d=450		d=150			d=150	
	a=2d	a=d/2	a=d/2	d	2d	a=d	2d	a=d	2d	a=d	2d	
2. Braestrup	222	1141	906	495	728	943	303					
3. Cervenka, Pokl & Elgehausen, fix	165	1254	581	311	1370	829	840					
4. Clement			415		1293		968					
5. Di Tommaso & Manfroni			405		915							
6. Feenstra, Rots & de Borst, fix			398									
7. Hassanzadeh			375									
8. Helbing, alvaredo & Witman, test			450									
9. Ohlsson & Elfgrén, test			380									
10. Merabet, Feur & Reynouard	232	1171	619	384	670		335					
11. Ozbolt	280	720	444	531			601					
12. Palm & Gylltoft, smeared		1580	1020	710			960					
13. Pankaj & Nenad Bicanic			350									
14. Rossi & Wu			417									
15. Schlangen & Van Mier			785-1095									
16. Stork & Reinhardt			870									
17. G. Valente & Di Tommaso			392									
18. Uchida, Rokugo & Koyanagi	230	1485	389	537			607					
19. Wang, Navi & Huet			840	357			865					
20. Yankelevsky & Leibowitz				509								

Tabla II.3: Resultados para estado axialsimétrico

RILEM TC 90-FMA AXI-SYMMETRIC STRESSES-RESUMEN DE RESULTADOS May 1991
 Round Robin Analysis of Anchor Bolts $F_t=3$ Mpa, $G_{if}= 100$ Nm/m²
 $F_{m\acute{a}x}$ en kN

Analizer/Tester	K=0						K= ∞								
	d=50			d=150			d=50			d=150			d=450		
	a=d	3d	3d	a=d	3d	3d	a=d	2d	3d	a=d/2	d	2d	3d	a=d	2d
1. Barr and Tokatly, test	22.5	29.8	62-160	64-220	62-160		42	31			382	276		3438	2484
2. Braestrup				216											
6. Freenstra et al, fix soft ,rot lin soft				233											
,rot non-lin soft				239											
9. Ohlsson & Elfgrén, test		26.2		191				33		219	199	192			983
11. Ozbolt				227											
12. Palm & Gylltoft				518											
16. Stork & Reinhardt															
17.G Valente&DiTommaso								27.3				219			1728
19.S. Valente & Carpinteri								47	46			307	290	1867	1712
20.Yankelevsky&Leibowitz							43	23.9			388	215		3488	1938
Etse (1998)				322											
Ecuación de predicción de Bode & Roik	23			120										627.6	

De los resultados indicados precedentemente se destaca la contribución de Cardiff a través de su trabajo “Experimental Study of de Pull-out Test” de Barr et al, (1991). En dicho trabajo experimental se realizó una serie de ensayos utilizando hormigones normales y livianos para las distintas relaciones geométricas propuestas por RILEM en su invitación. En la Tabla II-4 siguiente se detallan los resultados obtenidos.

Tabla II-4: Carga última de los ensayos experimentales de Barr et al.

d[mm]	a[mm]	Ø[mm]	f'c[N/mm ²]	Pu[kN]
50	d	12	15.2	22.25
50	3d	12	12.3	22.50
50	d	16	12.3	22.50
50	3d	16	12.3	29.75
150	d	16	6.7	52
150	3d	16	6.7	115
150	d	25	6.7	57
150	3d	25	6.7	69
150	d	32	6.7	64
150	3d	32	6.7	62

En todos los casos el tipo de falla observada fue falla cónica.

En el trabajo de Etse, (1998) se analiza computacionalmente el comportamiento de ensayos axialsimétricos de extracción en hormigón utilizándose un modelo basado en la teoría del flujo no-asociado de la plasticidad, el resultado del modelo analizado para la geometría correspondiente propuesta por RILEM se incorporó en Tabla II-3.

En el último renglón de la Tabla II-3 a efectos de comparar se calculó la carga última utilizando la ecuación de predicción de Bode & Roik para profundidades embebidas del perno de 50 y 150 mm.

2.3 CONCLUSIONES

- ✓ La carga última obtenida con la ecuación empírica según Walther, et al, (1991) de Bode & Roik, es coincidente con la obtenida según los estudios experimentales de Cardiff RILEM TC-90 FMA, (1991).
- ✓ Los resultados numéricos muestran diferencias marcadas de la carga última. Esto es indicativo de la falta de unicidad en cuanto a la ley constitutiva óptima para el análisis del comportamiento del *pull-out test*.
- ✓ Los resultados experimentales demuestran la marcada diferencia entre los comportamientos de falla del *pull-out test*, según la geometría, pasando de respuestas dúctiles en algunos casos a frágiles en otros, los cuales activan estados tensionales fuertemente diferenciados. Este hecho es responsable de la limitada validez ó precisión de las predicciones de los distintos modelos, ya que aquellos que muestran capacidad para predecir comportamientos dúctiles indican falencias en casos de respuestas altamente frágiles y viceversa.
- ✓ Se destaca la influencia en la carga última de la variación de los parámetros geométricos, lo cual no se pone de manifiesto en las ecuaciones empíricas, que solo consideran la influencia de la profundidad del perno embebida. Por otro lado, no existe coincidencia entre los resultados numéricos y experimentales respecto de dicha influencia.
- ✓ Los resultados expuestos demuestran que las diferentes metodologías numéricas, analíticas y experimentales utilizadas por la comunidad científica no han permitido arribar a un acuerdo acerca del mecanismo de falla de pernos anclados en hormigón.

CAPITULO 3
FUNDAMENTOS DE LA
ELASTICIDAD

CAPITULO 3

FUNDAMENTOS DE LA ELASTICIDAD

3.1 ANALISIS DE TENSIONES

La revisión indicada en la presente sección está basada en la información sobre fundamentos de la elasticidad dada en la bibliografía; Malvern, L.E. (1969); Mase, G. (1977) y constituye el marco teórico de importancia para el desarrollo de los temas centrales abordados en este trabajo de tesis.

3.1.1 EL CONCEPTO DE MEDIO CONTINUO

La naturaleza molecular de la estructura de la materia está bien establecida desde el punto de vista teórico. No obstante, en numerosas investigaciones sobre el comportamiento de un material, carece de interés la consideración individual de las moléculas, y se considera únicamente de importancia el comportamiento del material como un todo. En estos casos el comportamiento macroscópico observado se explica frecuentemente prescindiendo de toda consideración molecular y, en su lugar, se da por hecho que la materia se halla distribuida en forma continua en todo su volumen, llenando por completo el espacio que ocupa. Este *concepto de medio continuo* de la materia es el postulado fundamental de la Mecánica de Medios Continuos. Dentro de las limitaciones para las que es válida la suposición de medio continuo, este concepto proporciona la base para estudiar de manera semejante el comportamiento de sólidos, líquidos y gases.

La adopción del marco referente de medio continuo, como base para la descripción matemática del comportamiento de un material significa que cantidades de campo, tales como tensión y deformación, se expresan como funciones continuas para intervalos de las coordenadas del espacio y tiempo.

3.1.2 HOMOGENEIDAD. ISOTROPIA. MASA ESPECIFICA

Se dice que un medio material es *homogéneo* cuando tiene las mismas propiedades en todos sus puntos. Respecto a alguna propiedad mecánica, un material es *isótropo* cuando esa propiedad es invariable en todas las direcciones por un punto. Se dice que un material es *anisótropo* cuando presenta propiedades direccionales en algún punto del medio.

El concepto de *densidad* en las proximidades de un punto de un medio continuo se desarrolla a partir de la *relación masa-volumen*. En la Figura 3.1.1 se denota por ΔM la masa contenida en el elemento de volumen ΔV .

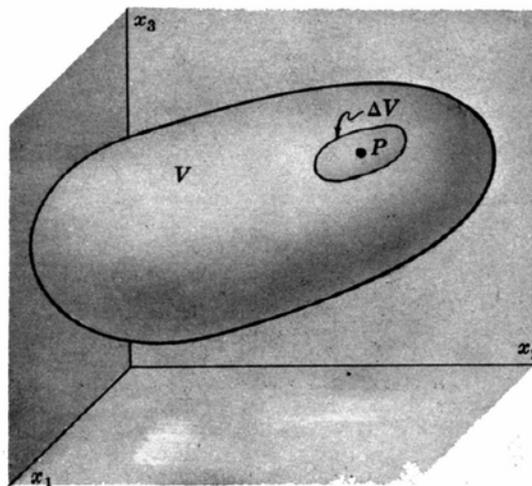


Figura 3.1.1: Elemento de volumen en las proximidades de un punto

La densidad media del material dentro de ΔV es por lo tanto

$$\rho = \frac{\Delta M}{\Delta V} \quad (3.1.1)$$

La *densidad* en algún punto interior P del elemento de volumen ΔV está dada matemáticamente, según el concepto de medio continuo, por la siguiente expresión:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} = \frac{dM}{dV} \quad (3.1.2)$$

La masa específica ρ es una cantidad escalar, la cual corresponde a un campo tensorial de orden cero.

3.1.3 FUERZAS MASICAS. FUERZAS SUPERFICIALES

Las fuerzas son tensores de primer orden que se describen mejor mediante conceptos intuitivos tales como empujar ó tirar. Las fuerzas que actúan en todos los elementos de volumen de un medio continuo se conocen como *fuerzas másicas* o fuerzas de cuerpo. Ejemplos de éstas son las fuerzas gravitacionales y las inerciales. Estas fuerzas se representan por el símbolo b_i (fuerza por unidad de masa), o como p_i (fuerza por unidad de volumen), las que están relacionadas, a través de la densidad, por la ecuación

$$\rho b_i = p_i \quad \text{ó} \quad \rho b = p \quad (3.1.3)$$

Las fuerzas que actúan en un elemento de superficie, ya sea una porción de la superficie límite del medio continuo ó quizás una superficie interna arbitraria, son conocidas como *fuerzas superficiales*. Estas se designan con f_i (fuerza por unidad de área). Las fuerzas de contacto entre sólidos son un tipo de fuerzas superficiales.

3.1.4 PRINCIPIO DE TENSION DE CAUCHY. EL VECTOR TENSION

En la Figura 3.1.2, se representa un medio continuo que ocupa la región R del espacio, y está sometido a fuerzas superficiales f_i y a fuerzas másicas b_i . Debido a que las fuerzas son transmitidas de una región del medio continuo a otra, la materia de un volumen arbitrario V contenida en la superficie cerrada S interactúa con la materia exterior a este volumen. Tomando a n_i como el tensor normal unitario exterior en el punto P de un pequeño elemento de superficie ΔS de S , sea Δf_i la fuerza resultante ejercida a través de ΔS en la materia interior a

V por la materia exterior a V . El elemento de fuerza Δf_i evidentemente dependerá de la elección de ΔS y n_i .

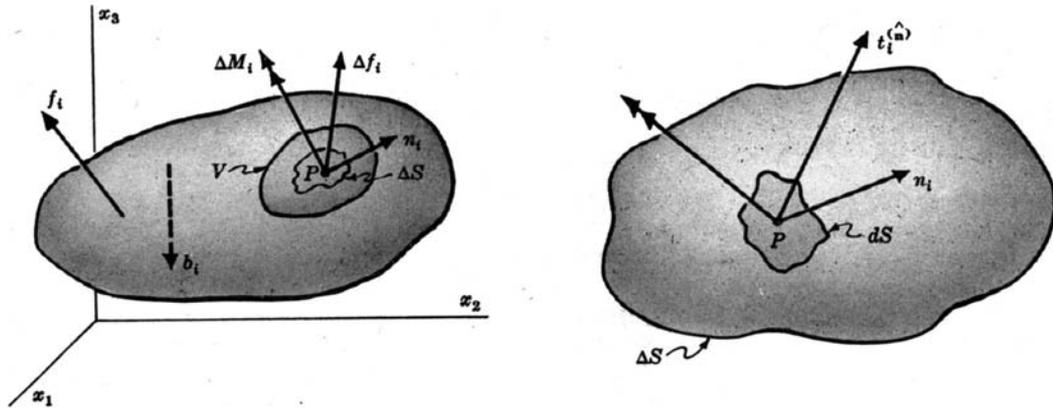


Figura 3.1.2: Medio continuo sometido a f_i y b_i Figura 3.1.3: Vector tensión $t_i^{(n)}$

Se ha de tener presente que la distribución de fuerzas en ΔS no es necesariamente uniforme. Por supuesto la distribución de la fuerza es, en general, equivalente a una fuerza y a un momento en P , como se indica en la Figura 3.1.2 por los vectores Δf_i y ΔM_i .

La fuerza media por unidad de área en ΔS está dada por $\Delta f_i / \Delta S$. El *principio de tensión de Cauchy* afirma que esta relación $\Delta f_i / \Delta S$ tiende a un límite definido df_i / dS cuando ΔS tiende a cero en el punto P , mientras que al mismo tiempo el momento de Δf_i respecto al punto P se anula al tomar el límite. El vector resultante df_i / dS (fuerza por unidad de área) se denomina *vector tensión* $t_i^{(n)}$ y se representa en la Figura 3.1.3. Si el momento en P no fuera nulo, al tomar el límite, habría también que definir en el punto, un *vector par-tensión*, tal como se indica en la Figura 3.1.3 por una flecha de dos puntas. En una rama de la teoría de la elasticidad, según la teoría de Cosserat (1901), se consideran tales vectores, pero no serán considerados en este caso.

Matemáticamente, el vector tensión se define por

$$t_i^{(\hat{n})} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta f_i}{\Delta S} = \frac{df_i}{dS} \quad \text{ó} \quad t^{(\hat{n})} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta S} = \frac{d\mathbf{f}}{dS} \quad (3.1.4)$$

La notación $t_i^{(\hat{n})}$ (ó $t^{(\hat{n})}$) se usa para realizar el hecho que el vector tensión en un punto P arbitrario del medio continuo, depende explícitamente del elemento de superficie particular ΔS elegido y que está representado por el normal unitario n_i (o \hat{n}). Para un elemento de superficie orientado distintamente, que tiene un normal unitario diferente, el vector tensión asociado a P , también será diferente. El vector tensión que aparece por la acción de la materia que está dentro de V a través de ΔS en P , y sobre la materia exterior es el vector $t_i^{(\hat{n})}$. Entonces por la ley de la acción y reacción del segundo postulado de Newton

$$-t_i^{(\hat{n})} = t_i^{(-\hat{n})} \quad \text{ó} \quad -\mathbf{t}^{(\hat{n})} = \mathbf{t}^{(-\hat{n})} \quad (3.1.5)$$

Al *vector tensión*, se lo nombra frecuentemente como *vector tracción*.

3.1.5 ESTADO DE TENSION EN UN PUNTO. TENSOR DE TENSION

En un punto arbitrario P de un medio continuo, el principio de tensión de Cauchy asocia un vector tensión $t_i^{(\hat{n})}$ a cada vector normal unitario n_i el cual representa la orientación de un elemento de superficie infinitesimal que contiene a P como un punto interior, de acuerdo a Figura 3.1.3. La totalidad de todos los pares posibles de tales vectores $t_i^{(\hat{n})}$ y n_i en P , define el *estado de tensión* en este punto. Afortunadamente, no es necesario especificar cada par de vectores, tensión y normal al plano, para describir completamente el estado de tensión en un punto dado. Esto se puede conseguir especificando el vector

tensión en cada uno de tres planos perpendiculares entre sí, según ejes coordenados determinados, que se cortan en P . Entonces, las ecuaciones de transformación de coordenadas sirven para relacionar al vector tensión correspondiente a cualquier otro sistema de referencia para el mismo punto del continuo.

Elijiendo planos perpendiculares a los tres ejes coordenados con el propósito de especificar el estado de tensión en un punto, los vectores tensión y normal adecuados se representan en la Figura. 3.1.4.

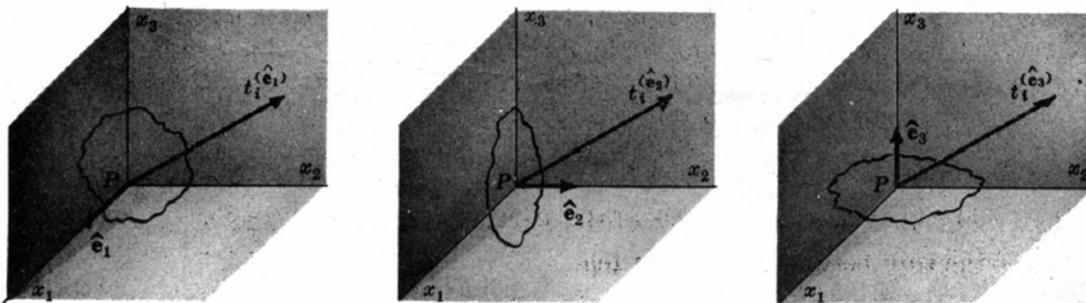


Figura 3.1.4: Estado de tensión en un punto

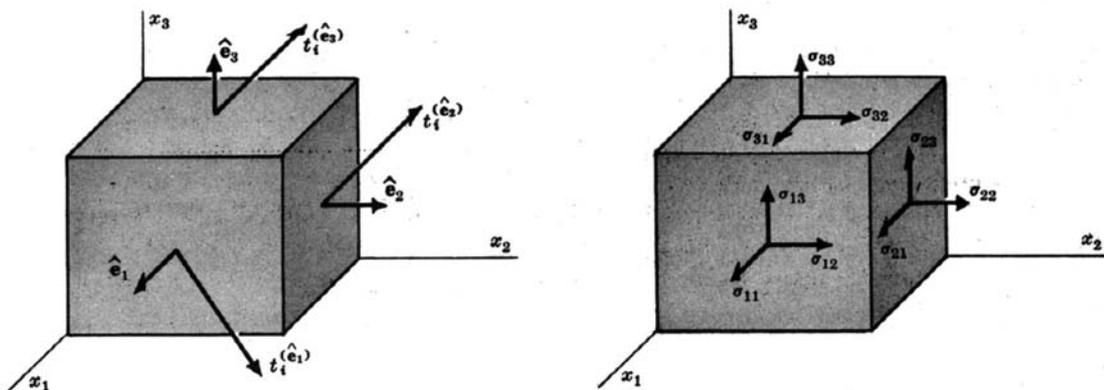


Figura 3.1.5: Estado de tensión en un punto

Figura 3.1.6: Tensor de tensión

Por simplicidad, los tres diagramas separados de la Figura 3.1.4, se suelen combinar con frecuencia en una representación esquemática sencilla como se indica en la Figura 3.1.5.

Cada uno de los tres vectores tensión asociados a los planos coordenados, de acuerdo a Figura 3.1.6, se pueden escribir en función de sus componentes cartesianas, como en las siguientes ecuaciones (3.1.6)

$$\begin{aligned}
 \hat{t}^{(e_1)} &= \hat{t}_1^{(e_1)} \hat{e}_1 + \hat{t}_2^{(e_1)} \hat{e}_2 + \hat{t}_3^{(e_1)} \hat{e}_3 = \hat{t}_j^{(e_1)} \hat{e}_j \\
 \hat{t}^{(e_2)} &= \hat{t}_1^{(e_2)} \hat{e}_1 + \hat{t}_2^{(e_2)} \hat{e}_2 + \hat{t}_3^{(e_2)} \hat{e}_3 = \hat{t}_j^{(e_2)} \hat{e}_j \\
 \hat{t}^{(e_3)} &= \hat{t}_1^{(e_3)} \hat{e}_1 + \hat{t}_2^{(e_3)} \hat{e}_2 + \hat{t}_3^{(e_3)} \hat{e}_3 = \hat{t}_j^{(e_3)} \hat{e}_j
 \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Las nueve componentes del vector tensión

$$\hat{t}_j^{(e_i)} \equiv \sigma_{ij} \tag{3.1.7}$$

son las componentes de un tensor cartesiano de segundo orden conocido como el tensor de tensiones, que se designa usualmente por Σ , de tal manera que las representaciones de componentes y matricial explícitas del tensor, toman respectivamente la forma,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (3.1.8)$$

Respecto a los tres planos coordenados, las componentes del tensor de tensión se pueden presentar gráficamente como se indica en la Figura 3.1.6. Las componentes perpendiculares a los planos (σ_{11} , σ_{22} , σ_{33}) se denominan *tensiones normales*. Aquellas componentes que actúan en las direcciones tangentes a los planos (σ_{12} , σ_{13} , σ_{21} , σ_{23} , σ_{31} , σ_{32}) se denominan *tensiones cortantes o cisiones*. Una componente de tensión es positiva cuando actúa en el sentido positivo de los ejes coordenados, y en un plano cuya normal exterior apunta hacia el sentido positivo de los ejes coordenados. La componente σ_{ij} actúa en un plano cuya normal es paralela al eje de coordenadas i -ésimo y en la dirección del j -ésimo eje de coordenadas. Las componentes representadas en la Figura 3.1.6 son todas positivas.

3.1.6 RELACION ENTRE EL VECTOR TENSION Y EL TENSOR DE TENSION

La relación entre el tensor de tensión σ_{ij} en un punto P y el vector tensión $t_i^{(n)}$ correspondiente a un plano de orientación arbitraria que contiene a este punto se puede deducir a partir del equilibrio de fuerzas o de un balance de momentos en un tetraedro elemental del medio continuo que tiene su vértice en el punto P . La base del tetraedro se toma perpendicular a n_i y las tres caras perpendiculares a los ejes coordenados como se observa en la Figura 3.1.7. Denotando por dS al área de la base ABC las áreas de las demás caras son áreas proyectadas, $dS_1 = dS n_1$ para la cara CPB , $dS_2 = dS n_2$ para la cara APC , $dS_3 = dS n_3$ para la cara BPA ó

$$dS_i = dS(\hat{n} \hat{e}_i) = dS \cos(\hat{n} \hat{e}_i) = dS n_i \quad (3.1.9)$$

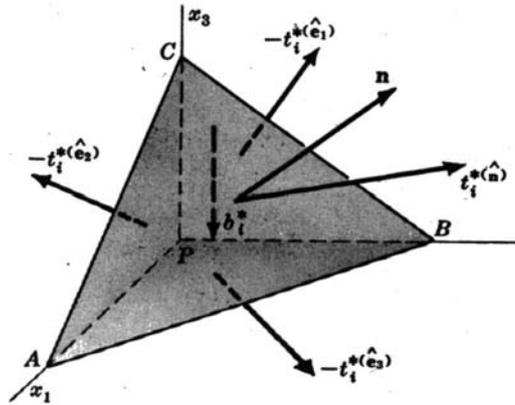


Figura 3.1.7: Tetraedro elemental con vértice en el punto P

Tanto los vectores tracción medios $t_i^{*(e_j)}$ en las caras y $t_i^{*(n)}$ en la base, como las fuerzas másicas medias (incluyendo las fuerzas inerciales, si las hubiera) que actúan en el tetraedro, están representados en la Figura 3.1.7. El equilibrio estático de estas fuerzas requiere que

$$t_i^{*(n)} dS - t_i^{*(e_1)} dS_1 - t_i^{*(e_2)} dS_2 - t_i^{*(e_3)} dS_3 + \rho b_i^* dV = 0 \quad (3.1.10)$$

Ahora bien, si las dimensiones lineales del tetraedro se reducen todas en una misma proporción constante, siendo las fuerzas másicas un infinitésimo de un orden más alto que las fuerzas superficiales, tenderán a cero más rápidamente. Al mismo tiempo los vectores tensión medios se acercarán más a los valores específicos adecuados para las direcciones en P . Por lo tanto, después de este proceso de tomar el límite y la sustitución de ecuación (3.1.9) en ecuación (3.1.10) ésta se reduce a

$$t_i^{*(n)} dS = t_i^{*(e_1)} n_1 ds + t_i^{*(e_2)} n_2 ds + t_i^{*(e_3)} n_3 ds = t_i^{*(e_j)} n_j ds \quad (3.1.11)$$

Eliminando el factor común dS y empleando la identidad $t_i^{(e_j)} \equiv \sigma_{ij}$, la ecuación (3.1.11) se convierte en

$$t_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j \quad \text{ó} \quad t^{(n)} = \hat{n} \cdot \Sigma \quad (3.1.12)$$

La ecuación (3.1.12) con frecuencia se expresa en la forma matricial

$$\begin{bmatrix} t_{1j}^{(n)} \end{bmatrix} = [n_k] [\sigma_{kj}] \quad (3.1.13)$$

que escrita explícitamente es

$$\begin{bmatrix} t_1^{(n)} \\ t_2^{(n)} \\ t_3^{(n)} \end{bmatrix} = [n_1, n_2, n_3] \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (3.1.14)$$

La expresión matricial (3.1.14) es equivalente a las ecuaciones

$$t_1^{(n)} = n_1 \sigma_{11} + n_2 \sigma_{21} + n_3 \sigma_{31}$$

$$t_2^{(n)} = n_1 \sigma_{12} + n_2 \sigma_{22} + n_3 \sigma_{32}$$

(3.1.15)

$$t_3^{(n)} = n_1 \sigma_{13} + n_2 \sigma_{23} + n_3 \sigma_{33}$$

3.1.7 EQUILIBRIO DE FUERZAS Y DE MOMENTOS. SIMETRIA DEL TENSOR DE TENSION

El equilibrio de un sector de volumen arbitrario V perteneciente a un medio continuo, sometido a un sistema de fuerzas superficiales $t_i^{(n)}$ y fuerzas másicas b_i tal como se indica en la Figura 3.1.8 requiere que la fuerza y el momento resultantes que actúan en el volumen sean cero.

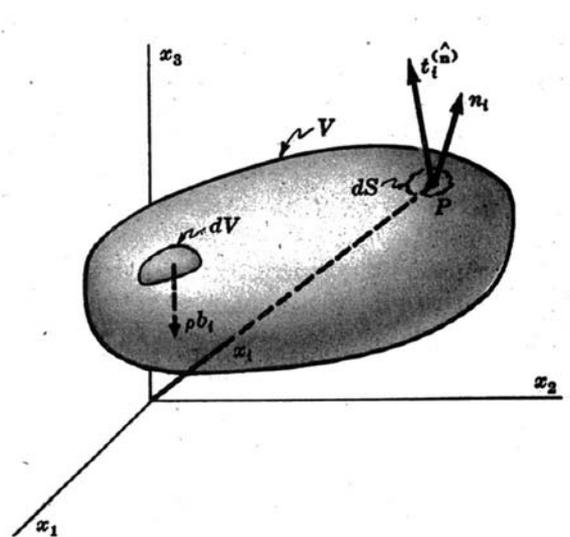


Figura 3.1.8: Volumen arbitrario V de un medio continuo

La suma de las fuerzas másicas y superficiales da lugar a la relación integral

$$\int_S \hat{t}_i^{(n)} dS + \int_V \rho b_i dV = 0 \quad \text{ó} \quad (3.1.16)$$

$$\int_S \hat{t}^{(n)} dS + \int_V \rho b dV = 0$$

Sustituyendo aquí $\hat{t}_i^{(n)}$ por $\sigma_{ij} n_j$ y convirtiendo la integral de superficie resultante en una integral de volumen mediante el teorema de la divergencia de Gauss, la ecuación (3.1.16) se convierte en

$$\int_V (\sigma_{ij,j} + \rho b_i) dV = 0 \quad \text{ó} \quad \int_V (\nabla \cdot \Sigma + \rho b) dV = 0 \quad (3.1.17)$$

Puesto que el volumen V es arbitrario, el integrando de la ecuación (3.1.17) tiene que anularse, de forma que

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = 0 \quad \text{ó} \quad \nabla \cdot \Sigma + \rho b = 0 \quad (3.1.18)$$

que son llamadas *ecuaciones de equilibrio*.

En ausencia de momentos distribuidos, el equilibrio de los momentos respecto al origen requiere que

$$\int_S \varepsilon_{ijk} x_j t_k^{(n)} dS + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho b_k dV = 0$$

ó

$$\int_S \mathbf{x} \cdot \mathbf{t}^{(n)} dS + \int_V \mathbf{x} \cdot \rho \mathbf{b} dV = 0 \quad (3.1.19)$$

en las que x_i es el vector posición de los elementos superficiales y de volumen. Haciendo de nuevo la sustitución $t_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j$, aplicando el teorema de Gauss y usando el resultado de ecuación (3.1.18), las integrales de ecuación (3.1.19) se combinan y reducen a

$$\int_V \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV = 0 \quad \text{ó} \quad \int_V \sum_v dV = 0 \quad (3.1.20)$$

Para el volumen arbitrario V , la ecuación (3.1.20) exige que

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0 \quad \text{ó} \quad \sum_v = 0 \quad (3.1.21)$$

La ecuación (3.1.21) representa a las ecuaciones $\sigma_{11} = \sigma_{21}$, $\sigma_{23} = \sigma_{33}$, $\sigma_{13} = \sigma_{31}$, o en conjunto

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (3.1.22)$$

que prueban que el *tensor de tensiones* es simétrico. Debido a la expresión (3.1.22) las ecuaciones de equilibrio (3.1.18) se escriben como

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = 0 \quad (3.1.23)$$

que en forma desarrollada quedan

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + \rho b_1 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + \rho b_2 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho b_3 &= 0 \end{aligned} \tag{3.1.24}$$

3.1.8 LEYES DE TRANSFORMACION DE TENSIONES

Relacionemos en el punto P los sistemas de coordenadas $Px_1 x_2 x_3$ y $Px'_1 x'_2 x'_3$ de la Figura 3.1.9, por medio de la tabla de cosenos directores

	X_1	X_2	X_3
X'_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
X'_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
X'_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

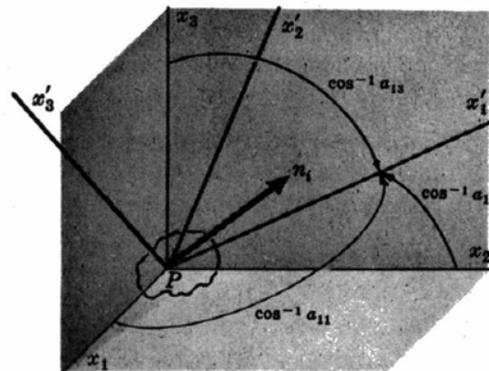


Figura 3.1.9: Sistemas de coordenadas $Px_1 x_2 x_3$ y $Px'_1 x'_2 x'_3$

que vienen representados por la matriz de transformación $[a_{ij}]$

$$A = a_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j \tag{3.1.25}$$

Según la ley de transformación de los tensores cartesianos de orden uno, las componentes del vector tensión $t_i^{(\hat{n})}$ referidas al sistema sin primas están relacionadas con las componentes del otro sistema $t_i'^{(\hat{n})}$ por la ecuación

$$t_i'^{(\hat{n})} = a_{ij} t_j^{(\hat{n})} \quad \text{ó} \quad \mathbf{t}'^{(\hat{n})} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{t}^{(\hat{n})} \quad (3.1.26)$$

De igual modo, por la ley de transformación de los tensores cartesianos de segundo orden, las componentes del tensor de tensión en los dos sistemas están relacionadas por

$$\sigma'_{ij} = a_{ip} a_{jq} \sigma_{pq} \quad \text{ó} \quad \Sigma' = \mathbf{A} \cdot \Sigma \cdot \mathbf{A}_c \quad (3.1.27)$$

Explícitamente, en forma matricial, las ecuaciones (3.1.26) y (3.1.27) son respectivamente

$$\begin{bmatrix} t_1'^{(\hat{n})} \\ t_2'^{(\hat{n})} \\ t_3'^{(\hat{n})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1^{(\hat{n})} \\ t_2^{(\hat{n})} \\ t_3^{(\hat{n})} \end{bmatrix} \quad (3.1.28)$$

y

$$\begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & \sigma'_{13} \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} & \sigma'_{23} \\ \sigma'_{31} & \sigma'_{32} & \sigma'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (3.1.29)$$

3.1.9 TENSIONES PRINCIPALES. INVARIANTES DE TENSION. ELIPSOIDE

DE TENSIONES

En el punto P , para el cual las componentes del tensor de tensiones son σ_{ij} , la ecuación (3.1.12), $t_i^{(\hat{n})} = \sigma_{ji}n_j$, asocia a cada dirección n_i un vector tensión $t_i^{(\hat{n})}$.

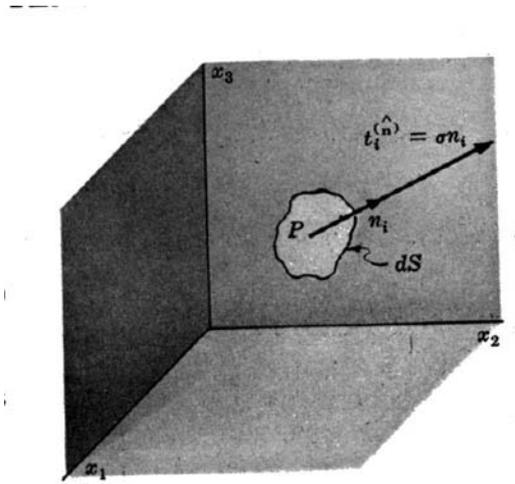


Figura 3.1.10: Dirección de colinealidad entre $t_i^{(\hat{n})}$ y n_i

Las direcciones para las que $t_i^{(\hat{n})}$ y n_i son colineales, como se ve en la Figura 3.1.10, se denominan *direcciones de tensiones principales*. Para una dirección principal,

$$t_i^{(\hat{n})} = \sigma n_i \quad \text{ó} \quad t_i^{(\hat{n})} = \sigma \hat{n} \quad (3.1.30)$$

en la que σ , la magnitud del vector tensión, se llama *valor de tensión principal*. Sustituyendo ecuación (3.1.30) en ecuación (3.1.12) y haciendo uso de las identidades $n_i = \delta_{ij}n_j$ y $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ resulta

$$(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma)n_j = 0 \quad \text{ó} \quad (\Sigma - I\sigma) \cdot \hat{n} = 0 \quad (3.1.31)$$

En las tres ecuaciones (3.1.31), hay cuatro cantidades desconocidas, que son, los tres cosenos directores n_i y el valor de tensión principal σ .

Para las soluciones de ecuación (3.1.31) que no sean triviales como $n_j = 0$, el determinante de los coeficientes, $|\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma|$ debe ser nulo. Explícitamente,

$$|\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma| = 0 \quad \text{ó} \quad \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (3.1.32)$$

de cuyo desarrollo se obtiene un polinomio cúbico en σ ,

$$\sigma^3 - I_{\Sigma}\sigma^2 + II_{\Sigma}\sigma - III_{\Sigma} = 0 \quad (3.1.33)$$

donde

$$I_{\Sigma} = \sigma_{ii} = tr \Sigma \quad (3.1.34)$$

$$II_{\Sigma} = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}) \quad (3.1.35)$$

$$III_{\Sigma} = |\sigma_{ij}| = \det \Sigma \quad (3.1.36)$$

son conocidos como el *primer, segundo y tercer invariantes de tensión*, respectivamente.

Las tres raíces de ecuación (3.1.33), $\sigma_{(1)}$, $\sigma_{(2)}$, $\sigma_{(3)}$ son los valores de las tres tensiones principales. Asociada a cada tensión principal $\sigma_{(k)}$ hay una dirección de tensión principal para la cual los cosenos directores $n_i^{(k)}$ son soluciones de las ecuaciones

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{(k)}\delta_{ij})n_j^{(k)} = 0 \quad \text{ó} \quad (\Sigma - \sigma_{(k)}I) \cdot \hat{n}^{(k)} = 0 \quad (k = 1,2,3) \quad (3.1.37)$$

En ecuación (3.1.37) los subíndices o superíndices encerrados en paréntesis, son sencillamente distintivos y como tales no participan en ninguna operación de suma. La forma desarrollada de ecuación (3.1.37) para la segunda dirección principal, por ejemplo es

$$\begin{aligned}
(\sigma_{11} - \sigma_{(2)})n_1^{(2)} + \sigma_{12}n_2^{(2)} + \sigma_{13}n_3^{(2)} &= 0 \\
\sigma_{21}n_1^{(2)} + (\sigma_{22} - \sigma_{(2)})n_2^{(2)} + \sigma_{23}n_3^{(2)} &= 0 \\
\sigma_{31}n_1^{(2)} + \sigma_{32}n_2^{(2)} + (\sigma_{33} - \sigma_{(2)})n_3^{(2)} &= 0
\end{aligned} \tag{3.1.38}$$

Debido a que el tensor de tensiones es real y simétrico, los valores de las tensiones principales son también reales. Cuando nos referimos a las direcciones de tensión principales, la matriz de las tensiones $[\sigma_{ij}]$ es una matriz diagonal

$$[\sigma_{ij}] \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{(I)} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{(3)} \end{bmatrix} \quad \text{ó} \quad [\sigma_{ij}] \equiv \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} \tag{3.1.39}$$

En la segunda forma se usan subíndices con números romanos para señalar que las tensiones principales están ordenadas, es decir, $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$. Puesto que las direcciones de tensión principales coinciden con los ejes principales de la cuádrlica de tensiones de Cauchy, los valores de las tensiones principales contienen a las componentes normales máxima y mínima en el punto.

En un espacio de tensiones principales, es decir, un espacio cuyos ejes están en las direcciones de tensión principales y cuyas coordenadas unitarias de medida son las tensiones $(t_1^{(\hat{n})}, t_2^{(\hat{n})}, t_3^{(\hat{n})})$ como se representa en la Figura 3.1.11, el vector tensión arbitrario $t_i^{(\hat{n})}$ tiene las componentes

$$t_1^{(\hat{n})} = \sigma_{(1)}n_1, \quad t_2^{(\hat{n})} = \sigma_{(2)}n_2, \quad t_3^{(\hat{n})} = \sigma_{(3)}n_3 \tag{3.1.40}$$

Pero como $(n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2 = 1$, para el vector unitario n_i la ecuación (3.1.40) exige que el vector tensión $t_i^{(\hat{n})}$ satisfaga la ecuación

$$\frac{(t_1^{(\hat{n})})^2}{(\sigma_{(1)})^2} + \frac{(t_2^{(\hat{n})})^2}{(\sigma_{(2)})^2} + \frac{(t_3^{(\hat{n})})^2}{(\sigma_{(3)})^2} = 1 \tag{3.1.41}$$

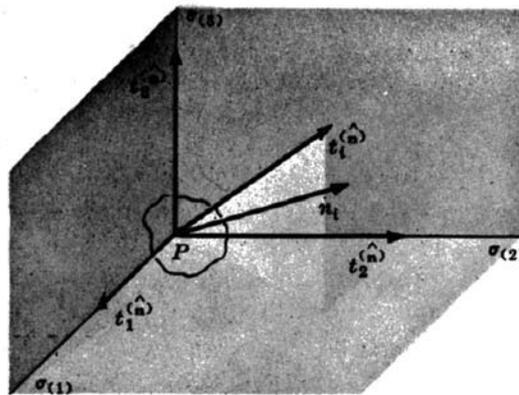


Figura 3.1.11: Espacio de tensiones principales

en el espacio de tensiones. Esta ecuación es un elipsoide conocido como el *elipsoide de tensiones de Lamé*.

3.1.10 VALORES DE TENSION CORTANTE MAXIMOS Y MINIMOS

Si el vector tensión $t_i^{(\hat{n})}$ se descompone en sus componentes ortogonales, normales y tangenciales al elemento de superficie dS sobre el que actúa, la magnitud de una componente normal se puede determinar de acuerdo a

$$\sigma_N = t_i^{(\hat{n})} n_i = t^{(\hat{n})} \cdot n = \sigma_{ij} n_i n_j \quad (3.1.42)$$

y la magnitud de una *componente cortante* ó tangencial está dada por

$$\sigma_S^2 = t_i^{(\hat{n})} t_i^{(\hat{n})} - \sigma_N^2 \quad (3.1.43)$$

Esta descomposición se presenta en la Figura 3.1.12 donde los ejes se han elegido en las direcciones de tensión principales que se supone ordenadas según $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$. Entonces en Figura 3.1.12, las componentes de $t_i^{(\hat{n})}$ son

$$\begin{aligned}
 t_1^{(\hat{n})} &= \sigma_I n_1 \\
 t_2^{(\hat{n})} &= \sigma_{II} n_2 \\
 t_3^{(\hat{n})} &= \sigma_{III} n_3
 \end{aligned}
 \tag{3.1.44}$$

y de ecuación (3.1.42), la magnitud de la componente normal es

$$\sigma_N = \sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2
 \tag{3.1.45}$$

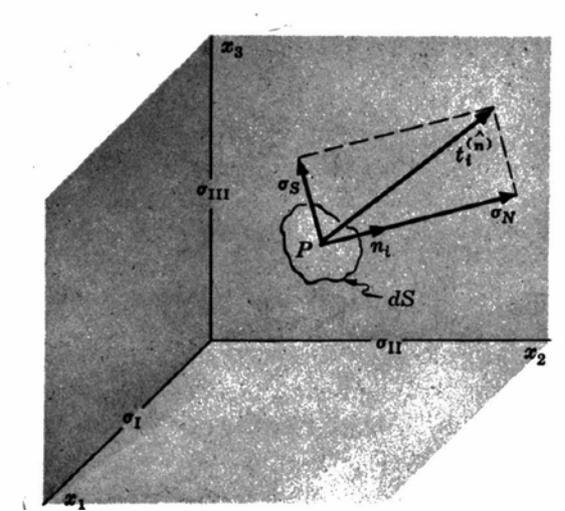


Figura 3.1.12: Descomposición del vector de tensión

Sustituyendo ecuaciones (3.1.44) y (3.1.45) en ecuación (3.1.46), la magnitud al cuadrado de la tensión cortante como una función de los cosenos directores n_i está dada por

$$\sigma_S^2 = \sigma_I^2 n_1^2 + \sigma_{II}^2 n_2^2 + \sigma_{III}^2 n_3^2 - (\sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2)^2
 \tag{3.1.46}$$

Los valores máximos y mínimos de σ_S , se pueden obtener de la ecuación (3.1.46) por el método de los *multiplicadores Lagrangianos*. El procedimiento consiste en construir la función

$$F = \sigma_S^2 - \lambda n_i n_i
 \tag{3.1.47}$$

en la que λ es un escalar denominado multiplicador Lagrangiano. La ecuación (3.1.47) es evidentemente una función de los cosenos directores n_i , de tal manera que las condiciones para los valores estacionarios (máximo o mínimo) de F son $\partial F / \partial n_i = 0$. Haciendo estas derivadas parciales iguales a cero, resultan las ecuaciones

$$n_1 \langle \sigma_I^2 - 2\sigma_I(\sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2) + \lambda \rangle = 0 \quad (3.1.48a)$$

$$n_2 \langle \sigma_{II}^2 - 2\sigma_{II}(\sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2) + \lambda \rangle = 0 \quad (3.1.48b)$$

$$n_3 \langle \sigma_{III}^2 - 2\sigma_{III}(\sigma_I n_1^2 + \sigma_{II} n_2^2 + \sigma_{III} n_3^2) + \lambda \rangle = 0 \quad (3.1.48c)$$

que, junto con la condición $n_i n_i = 1$, se pueden resolver para λ y los cosenos directores n_1, n_2, n_3 , asociados a los valores extremos de la tensión cortante. Un conjunto de soluciones para las ecuaciones (3.1.48) y las tensiones cortantes asociadas, de ecuación (3.1.46), son

$$n_1 = \pm 1, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = 0 \quad \text{para el que } \sigma_S = 0 \quad (3.1.49a)$$

$$n_1 = 0, \quad n_2 = \pm 1, \quad n_3 = 0 \quad \text{para el que } \sigma_S = 0 \quad (3.1.49b)$$

$$n_1 = 0, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = \pm 1 \quad \text{para el que } \sigma_S = 0 \quad (3.1.49c)$$

Los valores de las tensiones cortantes en ecuaciones (3.1.49) son evidentemente valores mínimos. Además, puesto que la ecuación (3.1.30) indica que las componentes cortantes se anulan en los planos principales, las direcciones dadas por ecuaciones (3.1.49) son las direcciones de tensión principales.

Se puede comprobar que un segundo conjunto de soluciones de ecuaciones (3.1.48), es

$$n_1 = 0, \quad n_2 = \pm 1/\sqrt{2}, \quad n_3 = \pm 1/\sqrt{2}; \quad \text{para el cual } \sigma_S = (\sigma_{II} - \sigma_{III})/2 \quad (3.1.50a)$$

$$n_1 = \pm 1/\sqrt{2}, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = \pm 1/\sqrt{2}; \quad \text{para el cual } \sigma_S = (\sigma_{III} - \sigma_I)/2 \quad (3.1.50b)$$

$$n_1 = \pm 1/\sqrt{2}, \quad n_2 = \pm 1/\sqrt{2}, \quad n_3 = 0, \quad \text{para el cual } \sigma_S = (\sigma_I - \sigma_{II})/2 \quad (3.1.50c)$$

La ecuación (3.1.50b) expresa el valor de la cisión máxima, que es igual a la semidiferencia de las tensiones principales más grande y más pequeña. También de ecuación (3.1.50b), la componente de cisión máxima que actúa en el plano que bisecta al ángulo recto formado por las direcciones de las tensiones principales máxima y mínima.

3.1.11 TENSION PLANA

En el caso de que una y solamente una de las tensiones principales sea cero, se dice que existe un estado de *tensión plano*. Tal estado se da en un punto sin carga, perteneciente a una superficie libre que limita al cuerpo. Si las tensiones principales están ordenadas, los círculos de tensión de Mohr tendrán alguna de las formas mostradas en la Figura 3.1.13

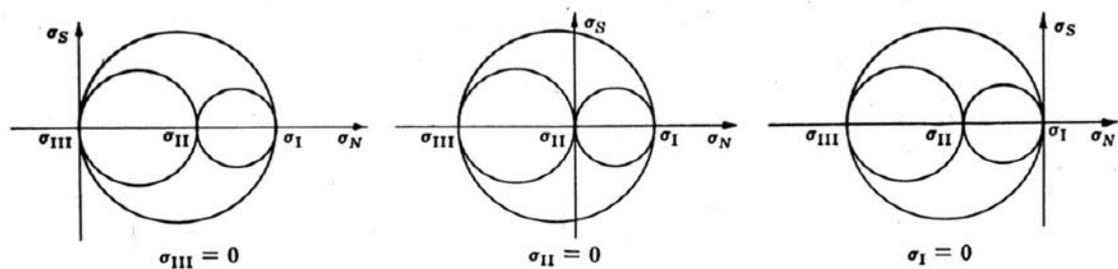


Figura 3.1.13: Círculos de tensión de Mohr

Si las tensiones principales no están ordenadas y se toma la dirección x_3 como la dirección principal de tensión nula, el estado de tensión se denomina tensión plana, paralela al plano x_1x_2 . Para una elección arbitraria de la orientación, en este caso, de los ejes ortogonales x_1 y x_2 , la matriz de tensión toma la forma

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1.51)$$

La cuádrlica de tensiones para este estado de tensión plana es un cilindro cuya base yace en el plano x_1x_2 y tiene la ecuación

$$\sigma_{11}x_1^2 + 2\sigma_{12}x_1x_2 + \sigma_{22}x_2^2 = \pm k^2 \quad (3.1.52)$$

Con frecuencia en los libros elementales de Resistencia de Materiales un estado de tensión plano se representa por un círculo de Mohr sencillo. Como se observa en la Figura 3.1.14, esta representación es necesariamente incompleta puesto que se requieren los tres círculos para mostrar la imagen completa del estado de tensión. En particular el valor de la tensión máxima en un punto no estará dado en el único círculo representado, porque es uno de los círculos interiores de la Figura 3.1.14. No obstante, un círculo de Mohr sencillo es capaz de poner en manifiesto los puntos de tensión de todos aquellos planos que pasan por P y que contienen al eje de tensión principal cero. Para tales planos, si los ejes de coordenadas se eligen de acuerdo con la representación del estado de tensión dado en ecuación (3.1.51), el círculo de Mohr sencillo para un estado plano tiene la ecuación

$$[\sigma_N - (\sigma_{11} + \sigma_{22})/2]^2 + (\sigma_s)^2 = [(\sigma_{11} - \sigma_{22})/2]^2 + (\sigma_{12})^2 \quad (3.1.53)$$

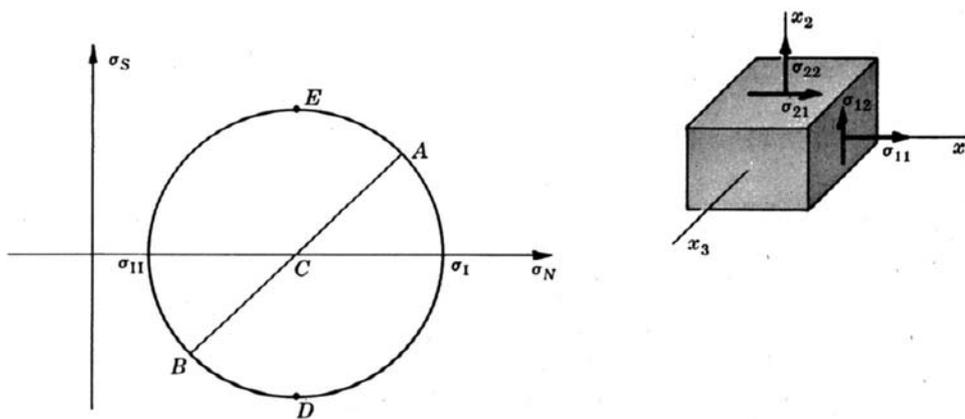


Figura 3.1.14: Representación del círculo de Mohr

Los aspectos esenciales de la construcción de este círculo se presentan en la Figura 3.1.14. El círculo se dibuja situando su centro C en $\sigma_N = (\sigma_{11} + \sigma_{22})/2$ y usando el radio $R = \sqrt{[(\sigma_{11} - \sigma_{22})/2]^2 + (\sigma_{12})^2}$ dado en ecuación (3.1.53)

El punto A de la circunferencia representa el estado de tensión en el elemento de superficie cuya normal es n_1 (la cara derecha del paralelepípedo rectangular indicado en la Figura 3.1.14). El punto B de la circunferencia representa el estado de tensión en la superficie superior del paralelepípedo con normal n_2 . Los puntos de las tensiones principales se señalan por sus símbolos σ_I y σ_{II} , y los puntos E y D son los que corresponden a las cisiones de valor máximo.

3.1.13 TENSORES DE TENSIONES ESFERICO Y DESVIADOR

Con frecuencia resulta muy útil desdoblar el tensor de tensión σ_{ij} , en dos tensores componentes, uno de los cuales (el *tensor de tensión hidrostático* o *esférico*) tiene la forma

$$\Sigma_M = \sigma_M I = \begin{pmatrix} \sigma_M & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_M & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_M \end{pmatrix} \quad (3.1.54)$$

donde $\sigma_M = -p = \sigma_{kk} / 3$ es la tensión normal media, y el segundo (el *tensor de tensión desviador*) tiene la forma

$$\Sigma_D = \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma_M & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_M & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_M \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} \quad (3.1.55)$$

Esta descomposición se expresa por las ecuaciones

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \sigma_{kk} / 3 + S_{ij} \quad \text{ó} \quad \Sigma = \sigma_M I + \Sigma_D \quad (3.1.56)$$

Las direcciones principales del tensor de tensión desviador S_{ij} son las mismas que las del tensor de tensión σ_{ij} . Los valores de las *tensiones desviadoras principales* son

$$S_{(k)} = \sigma_{(k)} - \sigma_M \quad (3.1.57)$$

La ecuación característica del tensor de tensión desviador, comparable a la del tensor de tensión de acuerdo a ecuación (3.1.33), es la cúbica

$$S^3 + II_{\Sigma_D} S - III_{\Sigma_D} = 0 \quad \text{ó} \quad S^3 + (S_I S_{II} + S_{II} S_{III} + S_{III} S_I) S - S_I S_{II} S_{III} = 0 \quad (3.1.58)$$

Se puede probar fácilmente que el primer invariante del tensor de tensión desviador I_{Σ_D} es idénticamente nulo, por ello falta el término cuadrático en ecuación (3.1.58).

3.2 ANALISIS DE DEFORMACIONES

3.2.1 PARTICULAS Y PUNTOS

En la cinemática de medios continuos, es necesario comprender claramente el significado de la palabra "punto", ya que se puede interpretar que se refiere ya sea a un "punto" en el espacio o a un "punto" de un medio continuo. En lo que sigue el término "punto" se usará exclusivamente para designar una posición en un espacio fijo. La palabra "partícula" denotará un pequeño elemento de volumen ó "punto material", de un medio continuo. En resumen, un *punto* es un lugar en el espacio, una *partícula* es una parte pequeña de un medio continuo material.

3.2.2 CONFIGURACION DEL MEDIO CONTINUO. CONCEPTOS DE DEFORMACION Y FLUJO

En un instante de tiempo t , un medio continuo que tiene un volumen V y una superficie límite S ocupará una cierta región R del espacio físico. La identificación de las partículas del medio continuo con los puntos del espacio que ocupan en el instante t respecto a un conjunto adecuado de ejes coordenados, se dice que especifica la *configuración* del medio continuo en ese instante. El término *deformación* se refiere a un cambio en la forma del medio continuo, entre una configuración inicial (no deformada) y una configuración subsiguiente (deformada). En los estudios de deformación se pone un significado especial en las configuraciones inicial y final. No se presta ninguna atención a las configuraciones intermedias o a una secuencia particular de configuraciones a través de las cuales tiene lugar la deformación. Por el contrario, la palabra *flujo* se usa para designar el estado continuo de movimiento de un medio continuo. Por supuesto, una configuración previa es inherente a las investigaciones de flujo para las que se especifica un campo de velocidades dependiente del tiempo.

3.2.3 VECTOR DE POSICION. VECTOR DESPLAZAMIENTO

En la Figura 3.2.1 se representa la configuración no deformada de un medio material continuo en el instante $t = 0$ junto con la configuración deformada del mismo en un instante de tiempo posterior $t \geq 0$. Para el presente desarrollo resulta conveniente referir las configuraciones inicial y final a ejes coordenados separados, como se ve en la figura.

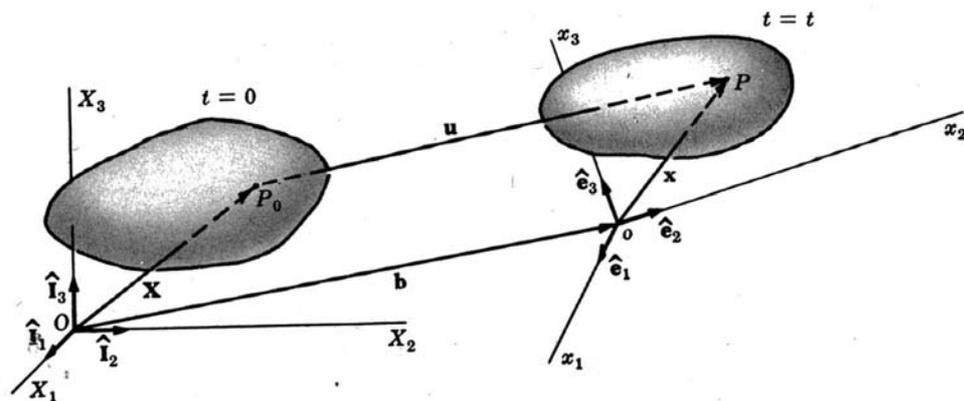


Figura 3.2.1: Configuración no deformada y deformada de un medio continuo

Según esto, en la configuración inicial una partícula representativa del medio continuo ocupa un punto P_0 en el espacio y tiene un *vector posición*

$$X = X_1\hat{I}_1 + X_2\hat{I}_2 + X_3\hat{I}_3 = X_K\hat{I}_K \quad (3.2.1)$$

con respecto a los ejes cartesianos rectangulares $OX_1X_2X_3$. En ecuación (3.2.1) se usan letras mayúsculas como índices y como tales aparecerán en varias ecuaciones que siguen, usándose como índices de suma. Aquí se usan para resaltar la conexión de ciertas expresiones con las coordenadas (X_1, X_2, X_3) , las que se denominan *coordenadas materiales*. En la configuración deformada la partícula originalmente situada en P_0 aparece ahora en el punto P y tiene el vector posición

$$x = x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2 + x_3\hat{e}_3 = x_i\hat{e}_i \quad (3.2.2)$$

cuando está referido a los ejes cartesianos rectangulares $ox_1x_2x_3$. Aquí se usan letras minúsculas como subíndices para indicar su conexión con las coordenadas (x_1, x_2, x_3) que dan la posición actual de la partícula y son denominadas con frecuencia *coordenadas espaciales*.

La orientación relativa de los ejes materiales $OX_1X_2X_3$ y de los ejes espaciales $ox_1x_2x_3$ se especifica mediante los cosenos directores α_{kK} y α_{Kk} , los cuales se definen por los productos escalares de los vectores unitarios según

$$\hat{e}_k \cdot \hat{I}_K = \hat{I}_K \cdot \hat{e}_k = \alpha_{kK} = \alpha_{Kk} \quad (3.2.3)$$

En estas expresiones no va implícita ninguna suma debida a los índices ya que k y K son índices distintivos. Puesto que como las deltas de Kronecker se designan por las ecuaciones $\hat{I}_K \cdot \hat{I}_P = \delta_{KP}$ y $\hat{e}_k \cdot \hat{e}_p = \delta_{kp}$, las *condiciones de ortogonalidad* entre los ejes espaciales y materiales toman la forma

$$\alpha_{kK} \alpha_{Kp} = \alpha_{kK} \alpha_{pK} = \delta_{kp}; \quad \alpha_{Kp} \alpha_{Mp} = \alpha_{pK} \alpha_{pM} = \delta_{KM} \quad (3.2.4)$$

En la Figura 3.2.1, el vector u que une los puntos P_o y P (posiciones inicial y final de la partícula, respectivamente), se conoce como el *vector desplazamiento*. Este vector puede ser expresado como

$$u = u_k \hat{e}_k \quad (3.2.5)$$

ó

$$U = U_K \hat{I}_K \quad (3.2.6)$$

en el que las componentes U_K y u_k están relacionadas a través de los cosenos directores α_{kK} . El vector unitario \hat{e}_k se expresa en función de los vectores base materiales \hat{I}_k , como

$$\hat{e}_k = \alpha_{kK} \hat{I}_K \quad (3.2.7)$$

Por lo tanto sustituyendo ecuación (3.2.7) en ecuación (3.2.5),

$$u = u_k(\alpha_{kK} \hat{I}_K) = U_K \hat{I}_K = U \quad (3.2.8)$$

de la que

$$U_K = \alpha_{kK} u_k \quad (3.2.9)$$

Dado que los cosenos directores α_{kK} son constantes, las componentes del vector desplazamiento según ecuación (3.2.9) obedecen a la ley de transformación de los tensores cartesianos de primer orden, como debe ser.

El vector b de la Figura 3.2.1 sirve para situar el origen o con respecto al O . De la geometría de la figura, se desprende que

$$u = b + x - X \quad (3.2.10)$$

Generalmente en la mecánica del medio continuo es posible considerar superpuestos los sistemas $OX_1X_2X_3$ y $ox_1x_2x_3$, con $b \equiv 0$, de forma que la ecuación (3.2.10) se convierte en

$$u = x - X \quad (3.2.11)$$

En la forma de componentes cartesianas esta ecuación está dada por la expresión general

$$u_k = x_k - \alpha_{kK} X_K \quad (3.2.12)$$

Sin embargo, para ejes superpuestos, las triadas unitarias de vectores base para los dos sistemas son idénticas, debido a que los símbolos de los cosenos

directores α_{kK} se convierten en deltas de Kronecker. Según esto la ecuación (3.2.12) se reduce a

$$u_k = x_k - X_k \quad (3.2.13)$$

en la que sólo aparecen subíndices minúsculos. Si no se especifica otra cosa, se supone que los ejes espaciales y materiales están superpuestos y entonces solamente se usarán índices minúsculos.

3.2.4 DESCRIPCIONES LAGRANGIANA Y EULERIANA

Cuando un medio continuo sufre una deformación (ó flujo), las partículas del medio continuo se mueven a lo largo de varios caminos en el espacio. Este movimiento puede ser expresado por ecuaciones de la forma

$$x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t) = x_i(X, t) \quad \text{ó} \quad x = x(X, t) \quad (3.2.14)$$

las que dan la posición actual de la partícula x_i que ocupaba el punto (X_1, X_2, X_3) , en el tiempo $t = 0$. También la ecuación (3.2.14) puede interpretarse como la forma que adquiere una distribución detallada de una configuración inicial en una configuración final. Se supone que tal distribución detallada es biunívoca y continua, con derivadas parciales continuas hasta las de cualquier orden deseado. La descripción del movimiento ó deformación expresada por ecuación (3.2.14) se conoce como formulación *Lagrangiana*.

Si, por otra parte, el movimiento ó la deformación se dan por ecuaciones de la forma

$$X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, t) = X_i(x, t) \quad \text{ó} \quad X = X(x, t) \quad (3.2.15)$$

en la que las variables independientes son las coordenadas x_i y t , la descripción es conocida como formulación *Euleriana*. Esta descripción puede interpretarse como la que proporciona una reproducción de la posición original de la partícula que ahora ocupa la posición (x_1, x_2, x_3) . Si la ecuación (3.2.15) indica una

distribución biunívoca y continua con derivadas parciales continuas, como también se supuso para ecuación (3.2.14), las dos distribuciones son las inversas únicas de una con respecto a la otra. La condición necesaria y suficiente para que exista una función inversa es que el Jacobiano, dado por ecuación 3.2.16, no se anule.

$$J = \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right| \quad (3.2.16)$$

3.2.5 GRADIENTES DE DEFORMACION. GRADIENTES DE DESPLAZAMIENTO

La diferenciación parcial de ecuación (3.2.14) con respecto a X_j , produce el tensor $\frac{\partial x_i}{\partial X_j}$ que se denomina *gradiente de deformación material*. En notación

simbólica, $\frac{\partial x_i}{\partial X_j}$, se representa

$$F = x \nabla_x \equiv \frac{\partial x}{\partial X_1} \hat{e}_1 + \frac{\partial x}{\partial X_2} \hat{e}_2 + \frac{\partial x}{\partial X_3} \hat{e}_3 \quad (3.2.17)$$

en la que el operador diferencial $\nabla_x = \frac{\partial}{\partial X_i} \hat{e}_i$ se aplica a la derecha (como se indica explícitamente en la ecuación). La forma matricial de F sirve posteriormente para aclarar esta propiedad del operador ∇_x . Así,

$$F = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \left[\frac{\partial}{\partial X_1}, \frac{\partial}{\partial X_2}, \frac{\partial}{\partial X_3} \right] = \begin{bmatrix} \partial x_1 / \partial X_1 & \partial x_1 / \partial X_2 & \partial x_1 / \partial X_3 \\ \partial x_2 / \partial X_1 & \partial x_2 / \partial X_2 & \partial x_2 / \partial X_3 \\ \partial x_3 / \partial X_1 & \partial x_3 / \partial X_2 & \partial x_3 / \partial X_3 \end{bmatrix} = [\partial x_i / \partial X_j] \quad (3.2.18)$$

La diferenciación parcial de ecuación (3.2.15) con respecto a x_j origina el tensor $\partial X_i / \partial x_j$ que se denomina *gradiente de deformación espacial*. Este tensor está representado por

$$H = X \nabla_x \equiv \frac{\partial X}{\partial x_1} \hat{e}_1 + \frac{\partial X}{\partial x_2} \hat{e}_2 + \frac{\partial X}{\partial x_3} \hat{e}_3 \quad (3.2.19)$$

que tiene la forma matricial

$$H = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial X_1 / \partial x_1 & \partial X_1 / \partial x_2 & \partial X_1 / \partial x_3 \\ \partial X_2 / \partial x_1 & \partial X_2 / \partial x_2 & \partial X_2 / \partial x_3 \\ \partial X_3 / \partial x_1 & \partial X_3 / \partial x_2 & \partial X_3 / \partial x_3 \end{bmatrix} = [\partial X_i / \partial x_j] \quad (3.2.20)$$

Los tensores de deformación material y espacial están relacionados por medio de la conocida regla de la cadena de la diferenciación parcial,

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \frac{\partial X_j}{\partial x_k} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial X_k} = \delta_{ik} \quad (3.2.21)$$

La diferenciación parcial del vector desplazamiento u_i respecto a ambas coordenadas origina ya sea el *gradiente de desplazamiento material* $\partial u_i / \partial X_j$, o el *gradiente de desplazamiento espacial* $\partial u_i / \partial x_j$. De acuerdo a ecuación (3.2.13), que expresa a u_i como una diferencia de coordenadas, estos tensores se pueden dar en función de los gradientes de deformación como el gradiente material, según

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \delta_{ij} \quad \text{ó} \quad J \equiv u \nabla_x = F - I \quad (3.2.22)$$

o el gradiente espacial

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \quad \text{ó} \quad K \equiv u \nabla_x = I - H \quad (3.2.23)$$

Habitualmente, las formas matriciales de J y K son respectivamente

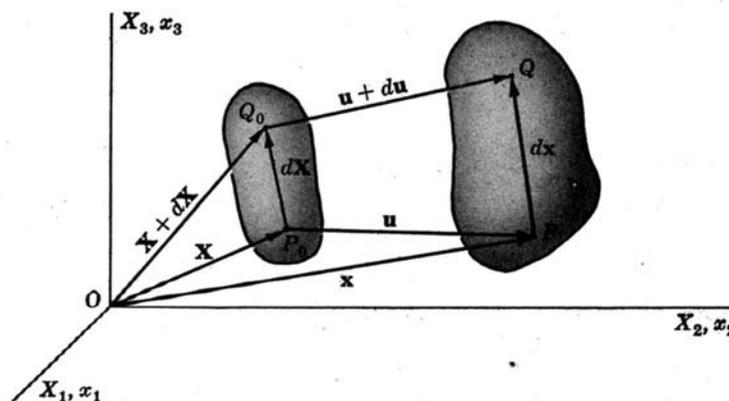
$$G = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} & \frac{\partial}{\partial X_2} & \frac{\partial}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right] \quad (3.2.24)$$

y

$$K = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \quad (3.2.25)$$

3.2.6 TENSORES DE DEFORMACION. TENSORES DE DEFORMACIONES FINITAS

En la Figura 3.2.2 las configuraciones inicial (no deformada) y final (deformada) de un medio continuo están referidas a los ejes coordenados cartesianos $OX_1X_2X_3$, y $ox_1x_2x_3$ superpuestos. En el proceso de deformación, dos partículas muy próximas que ocupan los puntos P_0 y Q_0 antes de la deformación, se desplazan a los puntos P y Q , respectivamente, en la



configuración deformada.

Figura 3.2.2: Configuraciones inicial y final referidas a $OX_1X_2X_3$, y $ox_1x_2x_3$

El cuadrado del elemento diferencial de longitud entre P_0 y Q_0 es

$$(dX)^2 = dX \cdot dX = dX_i dX_i = \delta_{ij} dX_i dX_j \quad (3.2.26)$$

De ecuación (3. 2.15), la distancia diferencial dX_i será

$$dX_i = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} dx_j \quad \text{ó} \quad dX = H \cdot dx \quad (3.2.27)$$

con lo que la longitud al cuadrado $(dX)^2$ de ecuación (3.2.26) se puede escribir

$$(dX)^2 = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} dx_i dx_j = C_{ij} dx_i dx_j \quad \text{ó} \quad (dX)^2 = dx \cdot C \cdot dx \quad (3.2.28)$$

en la que el tensor de segundo orden

$$C_{ij} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \quad \text{ó} \quad C = H_c \cdot H \quad (3.2.29)$$

se conoce como el *tensor de deformación de Cauchy*.

En la configuración deformada, el cuadrado del elemento diferencial de longitud entre P y Q es

$$(dx)^2 = dx \cdot dx = dx_i dx_i = \delta_{ij} dx_i dx_j \quad (3.2.30)$$

Según la ecuación (3.2.14) la distancia diferencial es aquí

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j \quad \text{ó} \quad dx = F \cdot dX \quad (3.2.31)$$

de tal manera que la longitud al cuadrado $(dx)^2$ de acuerdo a ecuación (3.2.30) se puede escribir

$$(dx)^2 = \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} dX_i dX_j = G_{ij} dX_i dX_j \quad \text{ó} \quad (dx)^2 = dX \cdot G \cdot dX \quad (3.2.32)$$

en la que el tensor de segundo orden

$$G_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} \quad \text{ó} \quad G = F_c \cdot F \quad (3.2.33)$$

es conocido como el *tensor de deformación de Green*.

La diferencia $(dx)^2 - (dX)^2$ entre dos partículas muy próximas de un medio continuo, se usa como una *medida de la deformación* que tiene lugar en los alrededores de las partículas, cuando se pasa de una configuración inicial a otra final. Si esta diferencia es idénticamente nula para todas las partículas vecinas de un medio continuo se dice que ha tenido lugar un *desplazamiento rígido*. Usando ecuaciones (3.2.32) y (3.2.26), esta diferencia se puede expresar en la forma

$$(dx)^2 - (dX)^2 = \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right) dX_i dX_j = 2L_{ij} dX_i dX_j$$

$$\text{ó} \quad (dx)^2 - (dX)^2 = dX \cdot (F_c \cdot F - I) \cdot dX = dX \cdot 2L_G \cdot dX \quad (3.2.34)$$

en la que el tensor de segundo orden

$$L_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right) \quad \text{ó} \quad L_G = 1/2 (F_c \cdot F - I) \quad (3.2.35)$$

se denomina *tensor de deformación finita lagrangiano* (o de Green). Usando ecuaciones (3.2.30) y (3.2.28), la misma diferencia se puede expresar en la forma

$$(dx)^2 - (dX)^2 = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j = 2E_{ij} dx_i dx_j$$

$$\text{ó} \quad (dx)^2 - (dX)^2 = dx \cdot (I - H_c \cdot H) \cdot dx = dx \cdot 2E_A \cdot dx \quad (3.2.36)$$

en la que el tensor de segundo orden

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \right) \quad \text{ó} \quad E_A = 1/2(I - H_c \cdot H) \quad (3.2.37)$$

se denomina *tensor de deformación finita euleriano* (o de Almansi).

Una forma especialmente útil de los tensores de deformación finita lagrangiano y euleriano es aquélla en la que estos tensores aparecen como funciones de los gradientes de desplazamiento. Entonces, si $\partial x_i / \partial X_j$ de la ecuación (3.2.22) se sustituye en ecuación (3.2.35), el resultado después de algunas operaciones algebraicas sencillas es el tensor de deformación finita lagrangiano de la forma

$$L_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \quad \text{ó} \quad L_G = 1/2(J + J_c + J_c \cdot J) \quad (3.2.38)$$

De la misma manera, si $\partial X_i / \partial x_j$, de ecuación (3.2.23) se sustituye en ecuación (3.2.37) resulta el tensor de deformación finita euleriano de la forma

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad \text{ó} \quad E_A = 1/2(K + K_c - K_c \cdot K) \quad (3.2.39)$$

Las representaciones matriciales de ecuaciones (3.2.39) y (3.2.40) se pueden escribir directamente de ecuaciones (3.2.24) y (3.2.25) respectivamente.

3.2.7 TEORIA DE LAS DEFORMACIONES PEQUEÑAS. TENSORES DE DEFORMACIONES INFINITESIMALES

La teoría de la mecánica del medio continuo, denominada de las *deformaciones pequeñas*, que se sigue en la presente tesis tiene como condición básica el requisito de que los gradientes de desplazamiento son pequeños comparados con la unidad. La medida fundamental de la deformación es la diferencia $(dx)^2$ –

$(dX)^2$, la que se puede expresar en función de los gradientes de desplazamiento introduciendo ecuaciones (3.2.38) y (3.2.39) en ecuaciones (3.2.34) y (3.2.36), respectivamente. Si los gradientes de desplazamiento son pequeños, los tensores de deformaciones finitas de ecuaciones (3.2.34) y (3.2.36) se reducen a tensores de deformaciones infinitesimales y las ecuaciones que resultan, representan a deformaciones pequeñas.

En ecuación (3.2.38), si cada una de las componentes de los gradientes de desplazamiento $\partial u_i / \partial X_j$ son pequeñas comparadas con la unidad, los productos entre ellas son despreciables y pueden ser eliminados. Entonces, el tensor que resulta es el *tensor de deformación infinitesimal lagrangiano*, que se denota por

$$l_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad \text{ó} \quad L = 1/2(u \nabla_x + \nabla_x u) = 1/2(J + J_c) \quad (3.2.40)$$

De igual modo, para $\partial u_i / \partial x_j \ll 1$ en ecuación (3.2.39), los términos de los productos pueden ser despreciados para llegar al *tensor de deformación infinitesimal euleriano*, que se denota por

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{ó} \quad E = 1/2(u \nabla_x + \nabla_x u) = 1/2(K + K_c) \quad (3.2.41)$$

Si ambos, los gradientes de desplazamiento y los desplazamientos mismos son pequeños, hay una diferencia muy pequeña entre las coordenadas espaciales y materiales de una partícula de un medio continuo. Según esto las componentes del gradiente material $\partial u_i / \partial X_j$ y las del espacial $\partial u_i / \partial x_j$ son casi iguales, de tal manera que los tensores de deformaciones infinitesimales lagrangiano y euleriano se pueden considerar iguales. Entonces

$$l_{ij} = \varepsilon_{ij} \quad \text{ó} \quad L = E \quad (3.2.42)$$

si los desplazamientos y los gradientes del desplazamiento son ambos suficientemente pequeños.

3.2.8 DESPLAZAMIENTOS RELATIVOS. TENSOR DE ROTACION LINEAL. VECTOR ROTACION

En la Figura 3.2.3 los desplazamientos de dos partículas vecinas están representados por los vectores $u_i^{(P_0)}$ y $u_i^{(Q_0)}$ (ver también Figura 3.2.2). El vector

$$du_i = u_i^{(Q_0)} - u_i^{(P_0)} \quad \text{ó} \quad du = u^{(Q_0)} - u^{(P_0)} \quad (3.2.43)$$

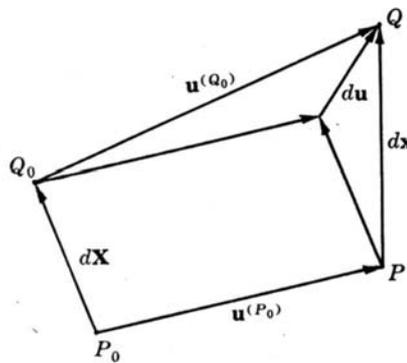


Figura 3.2.3: Vectores desplazamiento de dos partículas vecinas

se denomina *vector desplazamiento relativo* de la partícula que originalmente está en Q_0 respecto a la que originalmente está en P_0 .

Suponiendo condiciones de continuidad adecuadas en el campo de desplazamientos, se puede hacer un desarrollo en serie de Taylor para $u_i^{(P_0)}$ en las proximidades de P_0 . Despreciando los términos de orden superior en este desarrollo, el vector desplazamiento relativo se puede expresar por

$$du_i = (\partial u_i / \partial X_j)_{P_0} dX_j \quad \text{ó} \quad du = (u \nabla_x)_{P_0} \cdot dX \quad (3.2.44)$$

Aquí se emplea el paréntesis en las derivadas parciales para resaltar el requisito de que las derivadas son estimadas en el punto P_0 . Estas derivadas son de hecho las componentes del gradiente de desplazamiento material. La ecuación (3.2.44) es la forma Lagrangiana del vector desplazamiento relativo.

También resulta de interés definir el *vector desplazamiento relativo unitario* du_i/dX en el que dX es la magnitud del vector dX_i de distancia diferencial. Por lo tanto si v_i es un vector unitario en la dirección de dX_i de forma que $dX_i = v_i dX$, entonces

$$\frac{du_i}{dX} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \frac{dX_j}{dX} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} v_j \quad \text{ó} \quad \frac{du}{dX} = u \nabla_x \cdot \hat{v} = J \cdot \hat{v} \quad (3.2.45)$$

Puesto que el gradiente de desplazamiento material $\partial u_i / \partial X_j$ puede ser descompuesto únicamente en una parte simétrica y otra antisimétrica, el vector desplazamiento relativo du_i se puede expresar como

$$du_i = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \right] dX_j \quad \text{ó}$$

$$du = \left[\frac{1}{2} (u \nabla_x + \nabla_x u) + \frac{1}{2} (u \nabla_x - \nabla_x u) \right] \cdot dX \quad (3.2.46)$$

Al primer término del corchete de ecuación (3.2.46) se lo conoce como el *tensor de deformación lagrangiano lineal* l_{ij} y al segundo término se lo conoce como el *tensor de rotación lagrangiano lineal* y se denota por

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad \text{ó} \quad W = \frac{1}{2} (u \nabla_x - \nabla_x u) \quad (3.2.47)$$

En un desplazamiento para el cual el tensor de deformación l_{ij} es idénticamente nulo en las proximidades del punto P_0 el desplazamiento relativo en aquel punto será una rotación infinitesimal de cuerpo rígido. Esta rotación infinitesimal se expresa por el *vector rotación*

$$w_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} W_{kj} \quad \text{ó} \quad w = \frac{1}{2} \nabla_x \times u \quad (3.2.48)$$

en función del cual el desplazamiento relativo está dado por la expresión

$$du_i = \varepsilon_{ijk} w_j dX_k \quad \text{ó} \quad du = w \times dX \quad (3.2.49)$$

El desarrollo de la descripción lagrangiana del vector desplazamiento relativo, del tensor de rotación lineal y del vector de rotación lineal es completamente paralelo al desarrollo para las correspondientes cantidades eulerianas. Según esto, la *descripción euleriana del vector desplazamiento relativo es*

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \quad \text{ó} \quad du = K \cdot dx \quad (3.2.50)$$

y del *vector desplazamiento relativo unitario*

$$\frac{du_i}{dx} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dx} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j \quad \text{ó} \quad \frac{du}{dx} = u \nabla_x \cdot \hat{\mu} = K \cdot \hat{\mu} \quad (3.2.51)$$

La descomposición del gradiente de desplazamientos euleriano $\partial u_i / \partial x_j$ da lugar a la expresión

$$\frac{du_i}{dx} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] dx_j \quad \text{ó}$$

$$du = \left[\frac{1}{2} (u \nabla_x + \nabla_x u) + \frac{1}{2} (u \nabla_x - \nabla_x u) \right] \cdot dx \quad (3.2.52)$$

El primer término del corchete de ecuación (3.2.52) es el *tensor de deformación lineal euleriano* ε_{ij} . El segundo término es el *tensor de rotación euleriano lineal* y se denota por

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{ó} \quad \Omega = \frac{1}{2} (u \nabla_x - \nabla_x u) \quad (3.2.53)$$

De ecuación (3.2.53), el *vector de rotación euleriano lineal* se define según

$$\omega_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \omega_{kj} \quad \text{ó} \quad \omega = \frac{1}{2} \nabla_x \times u \quad (3.2.54)$$

en función del cual el desplazamiento relativo está dado por la expresión

$$du_i = \varepsilon_{ijk} \omega_j dx_k \quad \text{ó} \quad du = \omega \times dx \quad (3.2.55)$$

3.2.9 INTERPRETACION DE LOS TENSORES DE DEFORMACION LINEALES

Para la teoría de las deformaciones pequeñas, el tensor lagrangiano de deformación finita L_{ij} de ecuación (3.2.34) se puede sustituir por el tensor de deformación lagrangiano lineal l_{ij} , y aquella expresión se puede escribir ahora

$$(dx)^2 - (dX)^2 = (dx - dX)(dx + dX) = 2l_{ij} dX_i dX_j \quad \text{ó}$$

$$(dx)^2 - (dX)^2 = (dx - dX)(dx + dX) = dX \cdot 2L \cdot dX \quad (3.2.56)$$

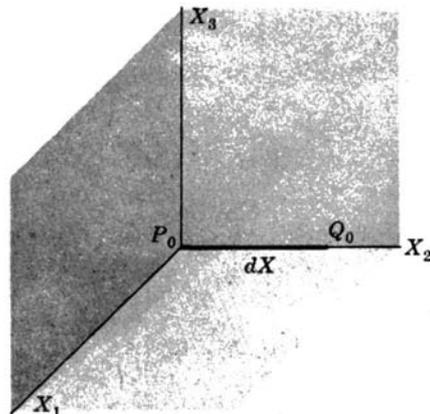


Figura 3.2.4: Elemento diferencial de línea P_0Q_0

Dado que para deformaciones pequeñas $dx \approx dX$, esta ecuación se puede escribir en la forma

$$\frac{dx - dX}{dX} = l_{ij} \frac{dX_i}{dX} \frac{dX_j}{dX} = l_{ij} v_i v_j \quad \text{ó} \quad \frac{dx - dX}{dX} = \hat{v} \cdot L \cdot \hat{v} \quad (3.2.57)$$

El primer miembro de la ecuación (3.2.57) se interpreta como el cambio de longitud por unidad de longitud original del elemento diferencial y se denomina *deformación normal* para el elemento de línea que originalmente tiene los cosenos directores dX_i/dX .

Cuando se aplica ecuación (3.2.57) al elemento diferencial de línea P_0Q_0 , situado en P_0 respecto a un conjunto local de ejes, como se representa en la Figura 3.2.4, resultará la deformación normal de ese elemento. Debido a que P_0Q_0 yace en este caso a lo largo del eje X_2

$$dX_1/dX = dX_3/dX = 0, \quad dX_2/dX = 1$$

y por lo tanto la ecuación (3.2.57) se convierte en

$$\frac{dx - dX}{dX} = l_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \quad (3.2.58)$$

De esta manera, la deformación normal de un elemento que originalmente está a lo largo del eje X_2 constituye la componente l_{22} . De igual modo para los elementos situados originalmente a lo largo de los ejes X_1 y X_3 , la ecuación (3.2.57) da los valores de las deformaciones normales l_{11} y l_{33} respectivamente. Por lo tanto, en general, los términos diagonales del tensor de deformación lineal representan deformaciones normales en las direcciones coordenadas.

La interpretación física de los términos que no ocupan la diagonal de l_{ij} se puede obtener por consideración de los elementos de línea originalmente situados a lo largo de dos de los ejes coordenados.

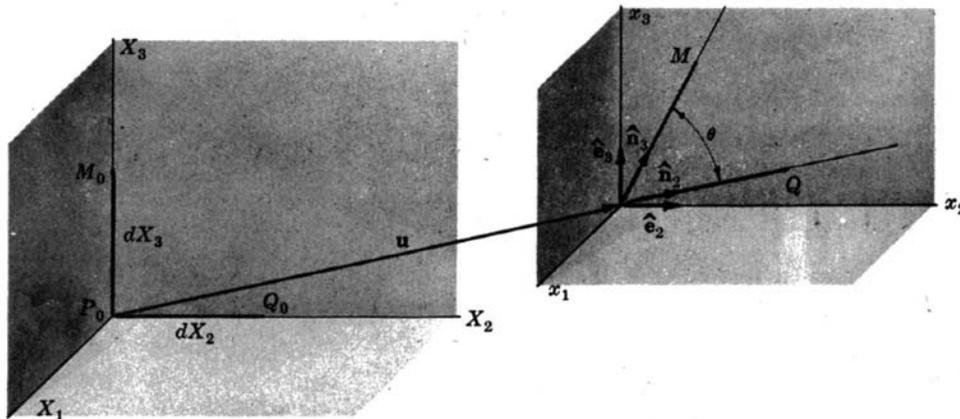


Figura 3.2.5: Deformación de P_0Q_0 y P_0M_0

En la Figura 3.2.5, los elementos de línea P_0Q_0 y P_0M_0 que originalmente están a lo largo de los ejes X_2 y X_3 respectivamente, se convierten después de la deformación, en los elementos de línea PQ y PM respecto al conjunto paralelo de ejes locales con origen en P . El ángulo recto original entre los elementos de línea se convierte en el ángulo θ . De ecuación (3.2.44) y de acuerdo a la hipótesis de la teoría de las deformaciones pequeñas, una aproximación de primer orden da para el vector unitario en P y en la dirección de Q ,

$$\hat{n}_2 = \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \hat{e}_3 \quad (3.2.59)$$

y, para el vector unitario en P en la dirección de M ,

$$\hat{n}_3 = \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \hat{e}_1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \hat{e}_2 + \hat{e}_3 \quad (3.2.60)$$

Por lo tanto

$$\cos \theta = \hat{n}_2 \cdot \hat{n}_3 = \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \quad (3.2.61)$$

o, despreciando el producto que es de orden superior,

$$\cos \theta = \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} = 2l_{23} \quad (3.2.62)$$

Posteriormente, tomando el cambio del ángulo recto original entre los elementos como $\gamma_{23} = \pi/2 - \theta$, y recordando que para la teoría lineal γ_{23} es muy pequeño, resulta

$$\gamma_{23} \approx \text{sen } \gamma_{23} = \text{sen}(\pi/2 - \theta) = \cos \theta = 2l_{23} \quad (3.2.63)$$

Por lo tanto, las componentes que no ocupan la diagonal del tensor de deformación lineal representan la mitad del cambio de ángulo recto original que formaban un elemento con otro. Estas componentes de deformación se denominan *deformaciones cortantes o distorsiones* y, debido al factor 2 de ecuación (3.2.63), estas componentes del tensor son iguales a la mitad de las deformaciones cortantes familiares en ingeniería.

También se puede hacer un desarrollo esencialmente paralelo e igual al presentado para la interpretación de las componentes de l_{ij} , con el tensor de deformación euleriano lineal ε_{ij} . La diferencia esencial en las deducciones estriba en la elección de los elementos de línea que en la descripción euleriana han de yacer a lo largo de los ejes coordenados en el estado deformado. Los términos diagonales de ε_{ij} son las deformaciones normales y los demás son las deformaciones cortantes. En el marco de las pequeñas deformaciones, para el que se admite como válido $l_{ij} = \varepsilon_{ij}$ no se hace ninguna distinción entre las interpretaciones euleriana y lagrangiana.

3.2.10 RELACION DE EXTENSION. INTERPRETACION DE LAS DEFORMACIONES FINITAS

Una medida importante de la deformación debida al aumento de longitud de un elemento de línea diferencial es la relación dx/dX , conocida como *relación de extensión*. Esta cantidad puede ser definida ya sea en un punto P_0 de la configuración no deformada o en el punto P de la configuración deformada.

Entonces de la ecuación (3.2.32) la relación de extensión al cuadrado en el punto P_0 para un elemento de línea a lo largo del vector unitario $\hat{m} = dX / dX$ está dada por

$$\left(\frac{dX}{dX}\right)_{P_0}^2 = \Lambda_{(\hat{m})}^2 = G_{ij} \frac{dX_i}{dX} \frac{dX_j}{dX} \quad \text{ó} \quad \Lambda_{(\hat{m})}^2 = \hat{m} \cdot G \cdot \hat{m} \quad (3.2.64)$$

Análogamente, de ecuación (3.2.28) el recíproco de la relación de extensión al cuadrado para un elemento de línea situado en P a lo largo del vector unitario $\hat{n} = dx / dx$ está dado por

$$\left(\frac{dX}{dx}\right)_P^2 = \frac{1}{\lambda_{(\hat{n})}^2} = C_{ij} \frac{dx_i}{dx} \frac{dx_j}{dx} \quad \text{ó} \quad \frac{1}{\lambda_{(\hat{n})}^2} = \hat{n} \cdot C \cdot \hat{n} \quad (3.2.65)$$

Para un elemento que originalmente está a lo largo del eje local X_2 como indica la Figura 3.2.4, $\hat{m} \equiv \hat{e}_2$ y por lo tanto $dX_1/dX = dX_3/dX = 0$, $dX_2/dX = 1$ de forma que la ecuación (3.2.64) expresa para este elemento

$$\Lambda_{(\hat{e}_2)}^2 = G_{22} = 1 + 2L_{22} \quad (3.2.66)$$

Análogamente se pueden obtener resultados similares para $\Lambda_{(\hat{e}_1)}^2$ y $\Lambda_{(\hat{e}_3)}^2$.

Para un elemento paralelo al eje x_2 en el estado deformado, la ecuación (3.2.65) indica

$$\frac{1}{\lambda_{(\hat{e}_2)}^2} = 1 - 2E_{22} \quad (3.2.67)$$

con expresiones similares para las cantidades $\frac{1}{\lambda_{(\hat{e}_1)}^2}$ y $\frac{1}{\lambda_{(\hat{e}_3)}^2}$. En general, $\Lambda_{(\hat{e}_2)}$

no es igual a $\lambda_{(\hat{e}_2)}$ puesto que el elemento situado originalmente a lo largo del eje X_2 no estará situado de igual manera a lo largo del eje x_2 después de la deformación.

La relación de extensión proporciona la base para la interpretación de los tensores de deformaciones finitas. El cambio de longitud por unidad de longitud original es

$$\frac{dx - dX}{dX} = \frac{dx}{dX} - 1 = \Lambda_{(\hat{m})} - 1 \quad (3.2.68)$$

y para un elemento P_0Q_0 a lo largo del eje X_2 (de la Figura 3.2.4), el *alargamiento unitario* es por lo tanto

$$L_{(2)} = \Lambda_{(\hat{e}_2)} - 1 = \sqrt{1 + 2L_{22}} - 1 \quad (3.2.69)$$

Este resultado también se puede deducir directamente de ecuación (3.2.34). Según la teoría de las deformaciones pequeñas, la ecuación (3.2.69) se reduce a ecuación (3.2.58). También, los alargamientos unitarios $L_{(1)}$ y $L_{(3)}$ están dados por ecuaciones análogas en función de L_{11} y L_{33} respectivamente.

Para los dos elementos de línea diferenciales indicados en la Figura 3.2.5, el cambio de ángulo $\gamma_{23} = \pi/2 - \theta$ se expresará en función de $\Lambda_{(\hat{e}_2)}$ y $\Lambda_{(\hat{e}_3)}$, por

$$\text{sen } \gamma_{23} = \frac{2L_{23}}{\Lambda_{(\hat{e}_2)}\Lambda_{(\hat{e}_3)}} = \frac{2L_{23}}{\sqrt{1 + 2L_{22}}\sqrt{1 + 2L_{33}}} \quad (3.2.70)$$

Cuando las deformaciones son pequeñas, la ecuación (3.2.70) se reduce a la ecuación (3.2.63).

3.2.11 TENSORES DE EXTENSION. TENSOR DE ROTACION

La *llamada descomposición polar* de un tensor de segundo orden, no singular y arbitrario, se expresa por el producto de un tensor de segundo orden simétrico y positivo con un tensor de segundo orden ortogonal. Cuando se aplica dicha descomposición multiplicativa al gradiente de deformación F , se puede escribir el resultado como

$$F_{ij} \equiv \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = R_{ik} S_{kj} = T_{ik} R_{kj} \quad \text{ó} \quad F = R \cdot S = T \cdot R \quad (3.2.71)$$

en el que R es el *tensor de rotación ortogonal*, y S y T son tensores simétricos positivos conocidos como *tensor de extensión positiva* y *tensor de extensión negativa*, respectivamente.

La interpretación de la ecuación (3.2.71) la proporciona la relación dada por ecuación (3.2.31). Introduciendo los productos internos de ecuación (3.2.71) en ecuación (3.2.31) resultan las ecuaciones

$$dx_i = R_{ik} S_{kj} dX_j = T_{ik} R_{kj} dX_j \quad \text{ó} \quad dx = R \cdot S \cdot dX = T \cdot R \cdot dX \quad (3.2.72)$$

De estas expresiones, a la deformación de dX_i en dx_i como se ve en la Figura 3.2.2, se le pueden dar dos interpretaciones físicas. En la primera forma del segundo miembro de la ecuación (3.2.72), la deformación consiste en un alargamiento secuencial (dado por S) y una rotación positiva, seguidos de un desplazamiento de cuerpo rígido hasta el punto P . En la segunda interpretación, la traslación de cuerpo rígido a P va seguida de una rotación negativa y finalmente de un alargamiento (dado por T). La traslación, desde luego, no altera las componentes vectoriales relativas a los ejes X_i y x_i .

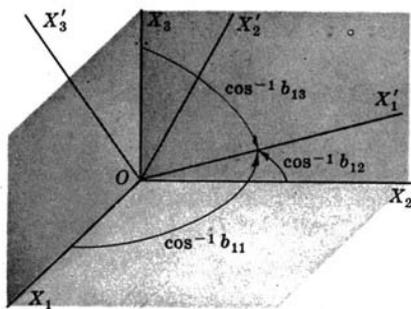
3.2.12 PROPIEDADES DE TRANSFORMACION DE LOS TENSORES DE DEFORMACION.

Los diversos tensores de deformación L_{ij} , E_{ij} , l_{ij} y ε_{ij} definidos respectivamente en ecuaciones (3.2.35), (3.2.37), (3.2.40) y (3.2.41) son todos tensores cartesianos de segundo orden como se indicó por los dos índices libres de cada uno. Según esto, para un conjunto de ejes girados X' que tienen la matriz de transformación $[b_{ij}]$ respecto al conjunto de ejes locales sin primas X_i en el punto P_0 como se representa en la Figura 3.2.6(a), las componentes de L'_{ij} y l'_{ij} ; están dadas por

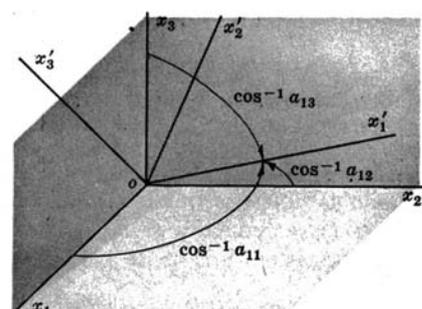
$$L'_{ij} = b_{ip} b_{jq} L_{pq} \quad \text{ó} \quad L'_G = B \cdot L_G \cdot B_C \quad (3.2.73)$$

y

$$l'_{ij} = b_{ip} b_{jq} l_{pq} \quad \text{ó} \quad L' = B \cdot L \cdot B_C \quad (3.2.74)$$



a)



b)

Figura 3.2.6: Transformación de los sistemas de ejes coordenados

De igual modo, para los ejes girados x'_i que tienen la matriz de transformación $[a'_{ij}]$ en la Figura 3.2.6 b), las componentes de E'_{ij} y e'_{ij} , son

$$E'_{ij} = a'_{ip} a'_{jq} E_{pq} \quad \text{ó} \quad E'_A = A \cdot E_A \cdot A_c \quad (3.2.75)$$

$$\varepsilon'_{ij} = a'_{ip} a'_{jq} \varepsilon_{pq} \quad \text{ó} \quad E' = A \cdot E \cdot A_c \quad (3.2.76)$$

Por analogía con la cuádrlica de tensiones, se pueden dar las *cuádrlicas de deformación lineal lagrangiana y euleriana* respecto a las coordenadas cartesianas locales η_i y ξ_i en los puntos P_0 y P respectivamente como se indica en la Figura 3.2.7. Así, la ecuación de la *cuádrlica de deformación lagrangiana* está dada por

$$l_{ij} \eta_i \eta_j = \pm h^2 \quad \text{ó} \quad \eta \cdot L \cdot \eta = \pm h^2 \quad (3.2.77)$$

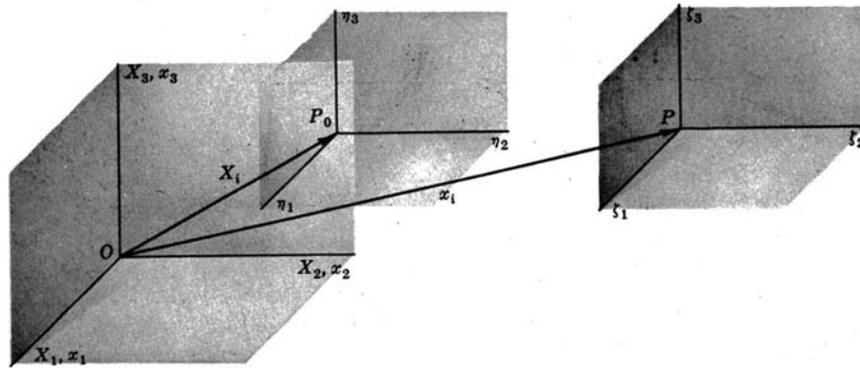


Figura 3.2.7: Cuádrlicas de deformación lagrangiana y euleriana

y la ecuación de la *cuádrlica de deformación euleriana* es

$$\varepsilon_{ij} \xi_i \xi_j = \pm g^2 \quad \text{ó} \quad \xi \cdot E \cdot \xi = \pm g^2 \quad (3.2.78)$$

Dos propiedades importantes de la cuádrlica de deformación lineal lagrangiana (euleriana) son las siguientes:

1. La deformación normal respecto a la longitud original (final) de un elemento de línea es inversamente proporcional a la distancia al cuadrado desde el origen de la cuádrlica P_0 (P) a un punto de su superficie.
2. El desplazamiento relativo de una partícula vecina situada en Q_0 (Q) por unidad de longitud original (final) es paralelo a la normal de la superficie de la cuádrlica en el punto de intersección con la línea P_0Q_0 (PQ).

Una percepción adicional de la naturaleza de las deformaciones locales en las proximidades de P_0 la proporciona la definición del *elipsoide de deformación* en aquel punto. De esta manera para un medio continuo no deformado, la ecuación de la superficie límite de una esfera infinitesimal de radio R se da en función de las coordenadas materiales locales por ecuación (3.2.26) según

$$(dX)^2 = \delta_{ij} dX_i dX_j = R^2 \quad \text{ó} \quad (dX)^2 = dX \cdot I \cdot dX = R^2 \quad (3.2.79)$$

Después de la deformación, la ecuación de la superficie de las mismas partículas materiales, está dada por ecuación (3.2.28) según

$$(dX)^2 = C_{ij} dx_i dx_j = R^2 \quad \text{ó} \quad (dX)^2 = dx \cdot C \cdot dx = R^2 \quad (3.2.80)$$

la que representa a un elipsoide conocido como *elipsoide de deformación material*. Por lo tanto, un volumen esférico de un medio continuo en un estado no deformado se transforma por la deformación en un elipsoide en P_0 . Análogamente, un volumen esférico infinitesimal en P en el medio continuo deformado se originó a expensas de un elemento de volumen elipsoidal en el estado no deformado. Para una esfera de radio r situada en P , las ecuaciones de estas superficies en función de las coordenadas locales están dadas por ecuación (3.2.30) para la esfera, según

$$(dx)^2 = \delta_{ij} dx_i dx_j = r^2 \quad \text{ó} \quad (dx)^2 = dx \cdot I \cdot dx = r^2 \quad (3.2.81)$$

y por ecuación (3.2.32) para el elipsoide

$$(dx)^2 = G_{ij}dX_i dX_j = r^2 \quad \text{ó} \quad (dx)^2 = dX \cdot G \cdot dX = r^2 \quad (3.2.82)$$

El elipsoide de ecuación (3.2.82) se denomina *elipsoide de deformación espacial*. Estos elipsoides de deformación tal como aquí se han descrito se conocen habitualmente como *elipsoides de deformación de Cauchy*.

3.2.13 DEFORMACIONES PRINCIPALES. INVARIANTES DE DEFORMACION. DILATACION CUBICA.

Los tensores de deformaciones lineales, lagrangiano y euleriano son tensores cartesianos de segundo orden simétricos y por lo tanto para la determinación de sus deformaciones y direcciones principales se sigue el mismo procedimiento de cálculo ya presentado para el caso de tensiones. Físicamente, una dirección principal de un tensor de deformación, es una dirección para la cual la orientación de un elemento situado en un punto dado no se altera por una deformación pura. El valor de una deformación principal es sencillamente el desplazamiento relativo unitario (deformación normal) que tiene lugar en una dirección principal.

Para el tensor de deformación lagrangiano I_{ij} el vector desplazamiento relativo unitario está dado por ecuación (3.2.45), la que se puede escribir

$$\frac{du_i}{dX} = (I_{ij} + W_{ij})v_j \quad \text{ó} \quad \frac{du}{dX} = (L + W) \cdot \hat{v} \quad (3.2.83)$$

Llamando $I_i^{(\hat{n})}$ a la deformación normal en la dirección del vector unitario n_i la ecuación (3.2.83) da para una deformación pura ($W_{ij} \equiv 0$) la relación

$$I_i^{(\hat{n})} = I_{ij}n_j \quad \text{ó} \quad I^{(\hat{n})} = L \cdot \hat{n} \quad (3.2.84)$$

Si la dirección n_i es una dirección principal con una deformación principal I , entonces

$$l_i^{(\hat{n})} = l n_i = l \delta_{ij} n_j \quad \text{ó} \quad l^{(\hat{n})} = l \hat{n} = l l \cdot \hat{n} \quad (3.2.85)$$

Igualando los segundos miembros de ecuaciones (3.2.84) y (3.2.85) se llega a la relación

$$(l_{ij} - \delta_{ij} l) = 0 \quad \text{ó} \quad (l - l l) \cdot \hat{n} = 0 \quad (3.2.86)$$

que junto con la condición $n_i n_i = 1$ de los vectores unitarios n_i proporcionan las ecuaciones necesarias para la determinación de la deformación principal l y sus cosenos directores n_i . No existen soluciones triviales de la ecuación (3.2.86) si y sólo sí el determinante de los coeficientes se anula. Por lo tanto,

$$|l_{ij} - \delta_{ij} l| = 0 \quad \text{ó} \quad |l - l l| = 0 \quad (3.2.87)$$

que desarrollada da la ecuación característica de l_{ij} ó sea la cúbica

$$l^3 - I_L l^2 + II_L l - III_L = 0 \quad (3.2.88)$$

$$\text{donde } I_L = l_{ii} = \text{tr} L, \quad II_L = \frac{1}{2}(l_{ii} l_{jj} - l_{ij} l_{ji}), \quad III_L = |l_{ij}| = \det L \quad (3.2.89)$$

son respectivamente el primero, segundo y tercer *invariantes de deformación lagrangianos*. Las raíces de ecuación (3.2.88) son las deformaciones principales denotadas por $l_{(1)}$, $l_{(2)}$, $l_{(3)}$.

El primer invariante del tensor de deformación lagrangiano puede expresarse en función de las deformaciones principales como

$$I_L = l_{ii} = l_{(1)} + l_{(2)} + l_{(3)} \quad (3.2.90)$$

y tiene una interpretación física importante. Para verla, consideremos un paralelepípedo rectangular diferencial cuyas aristas sean paralelas a las direcciones de deformación principales, tal como se representa en la Figura

3.2.8. El cambio de volumen por unidad de volumen original de este elemento paralelepédico se denomina *dilatación cúbica* y se expresa

$$D_0 = \frac{\Delta V_0}{V_0} = \frac{dX_1(1+l_{(1)})dX_2(1+l_{(2)})dX_3(1+l_{(3)}) - dX_1dX_2dX_3}{dX_1dX_2dX_3} \quad (3.2.91)$$

En la teoría de las pequeñas deformaciones, la aproximación de primer orden de esta relación es la suma

$$D_0 = l_{(1)} + l_{(2)} + l_{(3)} = I_L \quad (3.2.92)$$

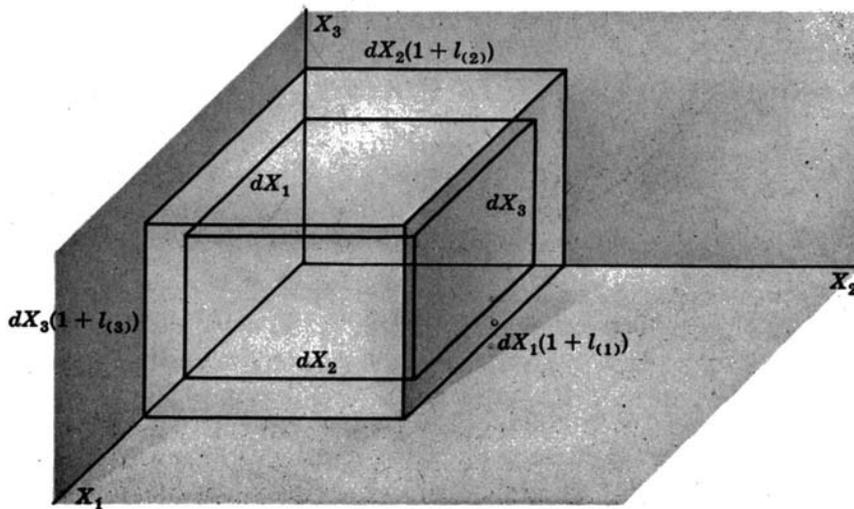


Figura 3.2.8: Cambio de volumen de un paralelepípedo rectangular

Cuando se considera el tensor de deformación euleriano ε_{ij} y su vector desplazamiento relativo unitario $\varepsilon_i^{(\hat{n})}$ asociado, las direcciones y deformaciones principales $\varepsilon_{(1)}$, $\varepsilon_{(2)}$, $\varepsilon_{(3)}$ se determinan exactamente del mismo modo que sus homólogas lagrangianas. Los invariantes de deformación eulerianos se pueden expresar en función de las deformaciones principales como

$$\begin{aligned} I_E &= \varepsilon_{(1)} + \varepsilon_{(2)} + \varepsilon_{(3)} \\ II_E &= \varepsilon_{(1)}\varepsilon_{(2)} + \varepsilon_{(2)}\varepsilon_{(3)} + \varepsilon_{(3)}\varepsilon_{(1)} \\ III_E &= \varepsilon_{(1)}\varepsilon_{(2)}\varepsilon_{(3)} \end{aligned} \quad (3.2.93)$$

La dilatación cúbica correspondiente a la descripción euleriana es

$$\Delta V / V = D = \varepsilon_{(1)} + \varepsilon_{(2)} + \varepsilon_{(3)} \quad (3.2.94)$$

3.2.14 TENSORES DE DEFORMACION ESFERICO Y DESVIADOR

Cada uno de los tensores de deformaciones lineales lagrangiano y euleriano, pueden desdoblarse en un tensor *esférico* y otro *desviador* de la misma forma en la que se llevó a cabo la descomposición del tensor de tensión. Si las componentes de los tensores desviadores lagrangiano y euleriano se denotan por d_{ij} y e_{ij} respectivamente, las expresiones que resultan son

$$l_{ij} = d_{ij} + \delta_{ij} \frac{l_{kk}}{3} \quad \text{ó} \quad L = L_D + \frac{I(\text{tr}L)}{3} \quad (3.2.95)$$

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \delta_{ij} \frac{\varepsilon_{kk}}{3} \quad \text{ó} \quad E = E_D + \frac{I(\text{tr}E)}{3} \quad (3.2.96)$$

Los tensores desviadores están asociados con la deformación cortante, por lo que la dilatación cúbica es nula. Por lo tanto, no es sorprendente que los primeros invariantes d_{ii} y e_{ii} de los tensores de deformación desviadores sean idénticamente nulos.

3.2.15 DEFORMACION PLANA. CIRCULOS DE MOHR DE DEFORMACIONES

Cuando solamente una de las deformaciones principales en un punto de un medio continuo es cero, se dice que existe un estado de *deformación plana* en aquel punto. En la descripción euleriana (la descripción lagrangiana sigue exactamente el mismo esquema), si se toma x_3 como la dirección de deformación principal nula, tiene lugar un estado de deformación plana paralelo al plano $x_1 x_2$ y el tensor de deformación está dado por

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad [\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.97)$$

Cuando x_1 y x_2 son además direcciones principales, el tensor de deformación tiene la forma

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad [\varepsilon_{ij}] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.98)$$

Muchos libros sobre resistencia de materiales y elasticidad, se refieren a un estado de deformación plana como un cambio de forma plana puesto que el campo de deformación es idéntico en todos los planos perpendiculares a la dirección de la deformación principal nula. Para una deformación plana perpendicular al eje x_3 , el vector desplazamiento se puede tomar solamente como una función de x_1 y x_2 . Las componentes de desplazamiento apropiadas para este caso de deformación plana se designan por

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(x_1, x_2) \\ u_2 &= u_2(x_1, x_2) \\ u_3 &= C \text{ (una constante que frecuentemente se toma 0)} \end{aligned} \quad (3.2.99)$$

Introduciendo estas expresiones en la definición de ε_{ij} dada por ecuación (3.2.41) se obtiene el tensor de deformación plana de la misma forma que la indicada en ecuación (3.2.97).

Una descripción gráfica del estado de deformación en un punto la proporcionan los *círculos de Mohr de deformaciones* de una manera exactamente igual a la presentada para los círculos de Mohr de tensiones. Con esta finalidad el tensor de deformación se presenta con frecuencia en la forma

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} & \varepsilon_{22} & \frac{1}{2}\gamma_{23} \\ \frac{1}{2}\gamma_{13} & \frac{1}{2}\gamma_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (3.2.100)$$

Aquí las γ_{ij} (para $i \neq j$) son denominadas componentes de deformación cortante de ingeniería, que son el doble de las componentes de deformación cortante tensorial.

El estado de deformación en un punto exento de cargas en la superficie límite de un cuerpo de un medio continuo es localmente un estado de deformación plana. Frecuentemente en estudios experimentales que suponen medidas de deformaciones en un punto de una superficie límite, los círculos de deformaciones de Mohr resultan útiles para informar acerca de los estados observados. Se miden tres deformaciones en un punto dado mediante una roseta, y se construyen los círculos de Mohr a partir de estos datos.

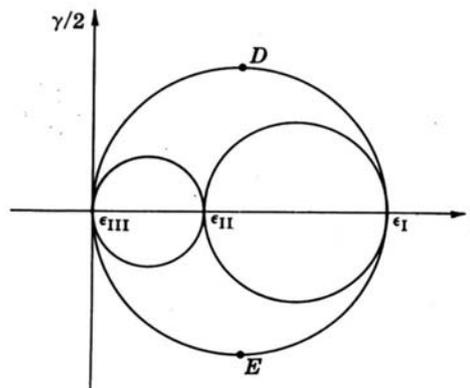


Figura 3.2.9: Círculos de Mohr para tensión plana

En Figura 3.2.9 se representa un diagrama para un caso típico de deformación plana, que se corresponde con los círculos de Mohr para una tensión plana. Las deformaciones principales se señalan tal como aparecen en el diagrama, y los valores máximos de la deformación cortante están representados por los puntos D y E .

3.2.16 ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD PARA DEFORMACIONES LINEALES

Si las componentes de deformación ε_{ij} se dan explícitamente como funciones de las coordenadas, las seis ecuaciones independientes (3.2.41)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

se pueden considerar como un sistema de seis ecuaciones diferenciales parciales para determinar las tres componentes de desplazamiento u_i . El sistema está indeterminado y, en general, no poseerá una solución para una elección arbitraria de las componentes de deformación ε_{ij} . Por lo tanto, si las componentes de desplazamiento u_i tienen valores únicos y continuos, han de imponerse algunas condiciones a las componentes de deformación. Las condiciones necesarias y suficientes para un campo de desplazamientos semejante son expresadas por las ecuaciones

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_m} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{km}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_m} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jm}}{\partial x_i \partial x_k} = 0 \quad (3.2.101)$$

En total hay ochenta y una ecuaciones en (3.2.101), pero solamente seis son independientes. Estas seis, escritas en forma explícita y simbólica aparecen como

$$\left. \begin{array}{l} 1. \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \\ 2. \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} \\ 3. \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} \\ 4. \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} \\ 5. \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} \\ 6. \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} \end{array} \right\} \quad \text{ó} \quad \nabla_x \times \varepsilon \times \nabla_x = 0 \quad (3.2.102)$$

Las ecuaciones de compatibilidad dadas en términos del tensor de deformación lineal lagrangiano l_{ij} también se escriben como una correspondencia obvia para la forma euleriana empleada anteriormente. Para una deformación plana paralela al plano x_1x_2 , las seis ecuaciones de (3.2.102) se reducen a la ecuación sencilla

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad \text{ó} \quad \nabla_x \times \varepsilon \times \nabla_x = 0 \quad (3.2.103)$$

donde ε es de la forma dada en (3.2.97).

CAPITULO 4
LEYES CONSTITUTIVAS

CAPITULO 4

LEYES CONSTITUTIVAS

4.1 GENERALIDADES

En forma general una ley constitutiva puede expresarse como

$$f(\sigma, \dot{\sigma}, \varepsilon, \dot{\varepsilon}) = 0 \quad (4.1.1)$$

es decir como una función de la tensión, de la deformación y de las tasas de deformación y de tensión que están representando el cambio de las mismas en el tiempo.

Usualmente una ley constitutiva es expresada en forma incremental. Las relaciones entre incrementos de tensiones y deformaciones pueden ser expresadas explícitamente en tensiones

$$\sigma_{ij} = f_{ij}(\sigma_{kl}) \dot{\varepsilon}_{mn} \quad (4.1.2)$$

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (4.1.3)$$

ó en forma inversa

$$\varepsilon_{ij} = g_{ij}(\varepsilon_{kl}) \dot{\sigma}_{mn} \quad (4.1.4)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = C_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} \quad (\text{para el caso lineal elástico}) \quad (4.1.5)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = C_{ijmn}(\varepsilon_{kl}) \dot{\sigma}_{mn} \quad (\text{para el caso elástico no lineal}) \quad (4.1.6)$$

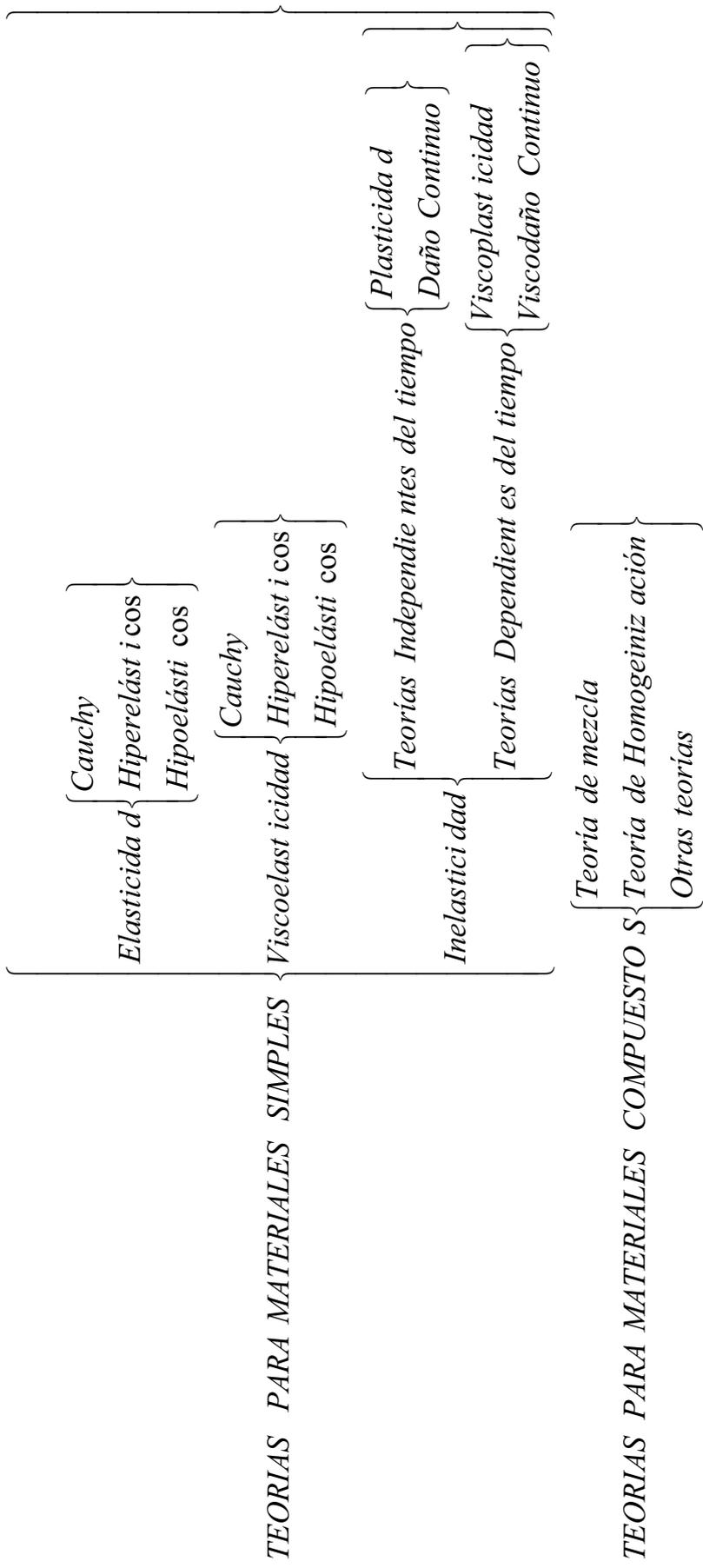
4.2 PASOS PARA LA FORMULACIÓN DE UN MODELO CONSTITUTIVO

1. Formulación matemática del modelo en el marco de una teoría constitutiva determinada.
2. Identificación de los parámetros materiales
3. Calibración de los parámetros materiales mediante comparación de predicciones numéricas con resultados válidos de ensayos experimentales.
4. Verificación de la capacidad predictiva frente a otros resultados de ensayos de la bibliografía.

Para una formulación precisa de un modelo matemático se necesita conocer un gran espectro de teorías materiales y hacer uso de varias de ellas en forma combinada. Esto permitirá obtener predicciones realistas y confiables.

4.3 CLASIFICACION DE MODELOS CONSTITUTIVOS PARA SOLIDOS

Las teorías constitutivas para sólidos pueden ser clasificadas en locales y no locales, respondiendo esto último a la definición de Noll (Truesdell & Noll 1910). En los modelos locales la ley de endurecimiento/ablandamiento viene dada en términos de una relación directa σ - ϵ . En los no locales, y a fin de introducir conceptos de "longitud característica" necesaria para eliminar la falta de objetividad de las predicciones numéricas de modelos locales respecto del tamaño de los elementos finitos, la ley endurecimiento/ablandamiento incorpora parámetros geométricos para tener en cuenta también estados de deformación fuera del punto considerado, en la evaluación de tensiones. Tanto los modelos locales como no locales pueden hacer uso de teorías elásticas y anelásticas para la evaluación de tensiones. En general las teorías a considerar en tales modelos para materiales sólidos son múltiples y diversas, y pueden ser clasificadas de la siguiente forma



4.3.2 MODELOS INELASTICOS: PLASTICIDAD

La revisión histórica indicada en esta sección está basada en la información sobre teoría de la plasticidad dada en la bibliografía indicada en inciso 4.3.1 del presente Capítulo 4 a la que se le agrega; Hill, R., (1950); Simo, J.C. & Taylor, R., (1985); Hughes, T. (1987); Runesson, Sture & Willam, (1988); Etse, G. & Willam, K., (1996)

4.3.2.1 GENERALIDADES

Las deformaciones elásticas se caracterizan por una recuperación completa de la configuración o forma original, una vez que se retiran las cargas aplicadas, lo que significa que el camino de carga y descarga en el diagrama σ - ε , coinciden y que entre ambas cantidades existe una única relación. Además las deformaciones elásticas solamente dependen de la magnitud de la tensión y no de la historia de tensiones o de deformaciones previas. Cualquier cambio de forma como respuesta de un medio continuo a las cargas aplicadas, o a condiciones ambientales, que no obedezca a las leyes constitutivas de la elasticidad clásica, se considera como una deformación anelástica. En particular, las deformaciones irreversibles que resultan de mecanismos de deslizamiento, o de dislocaciones a una escala atómica, y que por lo tanto conducen a cambios dimensionales permanentes, son conocidas como deformaciones plásticas. Tales deformaciones tienen lugar a intensidades de tensión por encima de un cierto valor umbral conocido como límite elástico o tensión de fluencia, que se denota por σ_Y .

En la teoría de la plasticidad, la cuestión fundamental consiste en la formulación matemática de las relaciones tensión-deformación adecuadas para la descripción fenomenológica de las deformaciones plásticas, y en la adopción de un criterio de fluencia apropiado para predecir el comienzo del comportamiento plástico.

La frase "flujo plástico" se usa ampliamente en plasticidad para designar a una deformación plástica continua. No obstante, a diferencia del flujo de un fluido,

un flujo plástico continuo se puede referir a una cantidad de deformación, como a una velocidad de deformación.

Muchos de los conceptos básicos de la plasticidad se pueden introducir de una forma elemental considerando el diagrama tensión-deformación de un ensayo de tracción (o compresión) uniaxial correspondiente a un material hipotético como se indica en la Figura 4.3.2.1

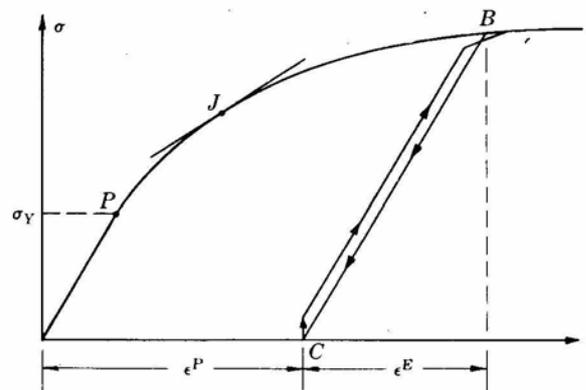


Figura 4.3.2.1: Comportamiento elastoplástico general

En este diagrama σ es la tensión nominal (fuerza/sección original), mientras que la deformación ε se puede representar ya sea por la deformación convencional aquí definida por

$$e = (L - L_0) / L_0 \quad (4.3.2.1)$$

donde L es la longitud instantánea de la probeta y L_0 la longitud original, o por la deformación natural (logarítmica) o real definida por

$$\varepsilon = \ln(L / L_0) = \ln(1 + e) = e - e^2 / 2 + O(e^3) \quad (4.3.2.2)$$

Para deformaciones pequeñas, estas dos medidas de la deformación son casi iguales como se ve en ecuación (4.3.2.2) y a menudo se puede despreciar la diferencia.

El punto límite P , correspondiente al límite elástico σ_Y , separa a la curva tensión-deformación de la Figura 4.3.2.1 en un campo elástico y un campo plástico. Desafortunadamente, este punto no siempre se encuentra bien definido. Algunas veces se toma en el límite de proporcionalidad que está situado en el extremo superior de la parte inicial recta de la curva. En ocasiones se puede también elegir un punto J , conocido como límite elástico aparente de Johnson que se define como la tensión correspondiente al punto en el que la pendiente de la curva alcanza un 50% de su valor inicial. También se usan varios métodos equivalentes para definir este punto límite, uno de los cuales es la tensión que produce una deformación permanente del 0.2%.

En el dominio elástico inicial, que puede ser lineal ó no lineal, un aumento de la tensión da lugar a que el punto representativo del estado de tensión-deformación se desplace hacia arriba a lo largo de la curva, y una disminución de la tensión o una descarga da lugar a que dicho punto se desplace hacia abajo a lo largo del mismo camino. Por lo tanto, en el campo elástico existe una relación biunívoca tensión-deformación.

En el dominio plástico, la descarga a partir de un punto tal como el B de la Figura 4.3.2.1, da lugar a que el punto representativo de la tensión siga el camino BC que esencialmente es paralelo a la recta elástica inicial de la curva. En C , cuando la tensión es nula, queda una deformación plástica permanente ε^P . La deformación elástica recuperable desde B se señala por ε^E en la Figura 4.3.2.1. Si se vuelve a cargar desde C volviendo hacia B seguiría muy estrechamente el camino BC pero con una curvatura en B , y con un pequeño anillo de histéresis debido a la pérdida de energía en el ciclo de carga y descarga. Después de volver a B es necesario un aumento de carga para originar una deformación posterior, condición que se conoce como endurecimiento por trabajo o endurecimiento por deformación. Está claro, por lo tanto, que en el campo plástico las tensiones dependen de las cargas aplicadas o de la historia de deformación del material. El efecto de la historia

será descripto exclusivamente a través de la evolución de parámetros de estado.

Aunque se reconoce que la temperatura tiene una influencia definitiva en el comportamiento plástico de un material real, es costumbre, en general, suponer condiciones isotérmicas y considerar a la temperatura como un parámetro. De igual modo, es una práctica común en la plasticidad tradicional despreciar cualquier efecto que tuviera la velocidad de deformación en la curva tensión-deformación. Según esto, se supone que las deformaciones plásticas son independientes del tiempo y separadas de fenómenos tales como la fluencia y relajación.

4.3.2.2 COMPORTAMIENTO PLASTICO IDEALIZADO

Gran parte de la teoría tridimensional que analiza el comportamiento plástico se puede considerar como una generalización de ciertas idealizaciones de la curva tensión-deformación unidimensional de la Figura 4.3.2.1. Los cuatro diagramas tensión-deformación idealizados más comúnmente usados se presentan en la Figura 4.3.2.2 acompañados cada uno de un modelo mecánico sencillo. En la Figura 4.3.2.2a, la respuesta elástica y el endurecimiento por deformación se han omitido, mientras que en Figura 4.3.2.2b se incluye la respuesta elástica, previa al límite elástico, pero no así el endurecimiento por deformación. En ausencia del endurecimiento por deformación la respuesta plástica se denomina perfectamente plástica. Las representaciones a y b son especialmente útiles para el estudio de la deformación plástica restringida en la que no son posibles deformaciones grandes. En la Figura 4.3.2.2c se ha omitido la respuesta elástica y se ha supuesto que el endurecimiento por deformación es lineal. Esta representación, así como la a, se ha usado ampliamente para analizar el flujo plástico no restringido.

Las curvas tensión-deformación de la Figura 4.3.2.2 aparecen en el contexto de las curvas de tensión. La curva de compresión para una probeta no deformada previamente (sin historia de deformación plástica) se toma como la imagen de la curva de tensión respecto al origen. No obstante, si se aplica una tensión reversible (tensión a compresión o viceversa) a un material real, que ha sido endurecido por deformación se observa una disminución definida del límite

elástico. Este fenómeno se conoce como *efecto Bauschinger*.

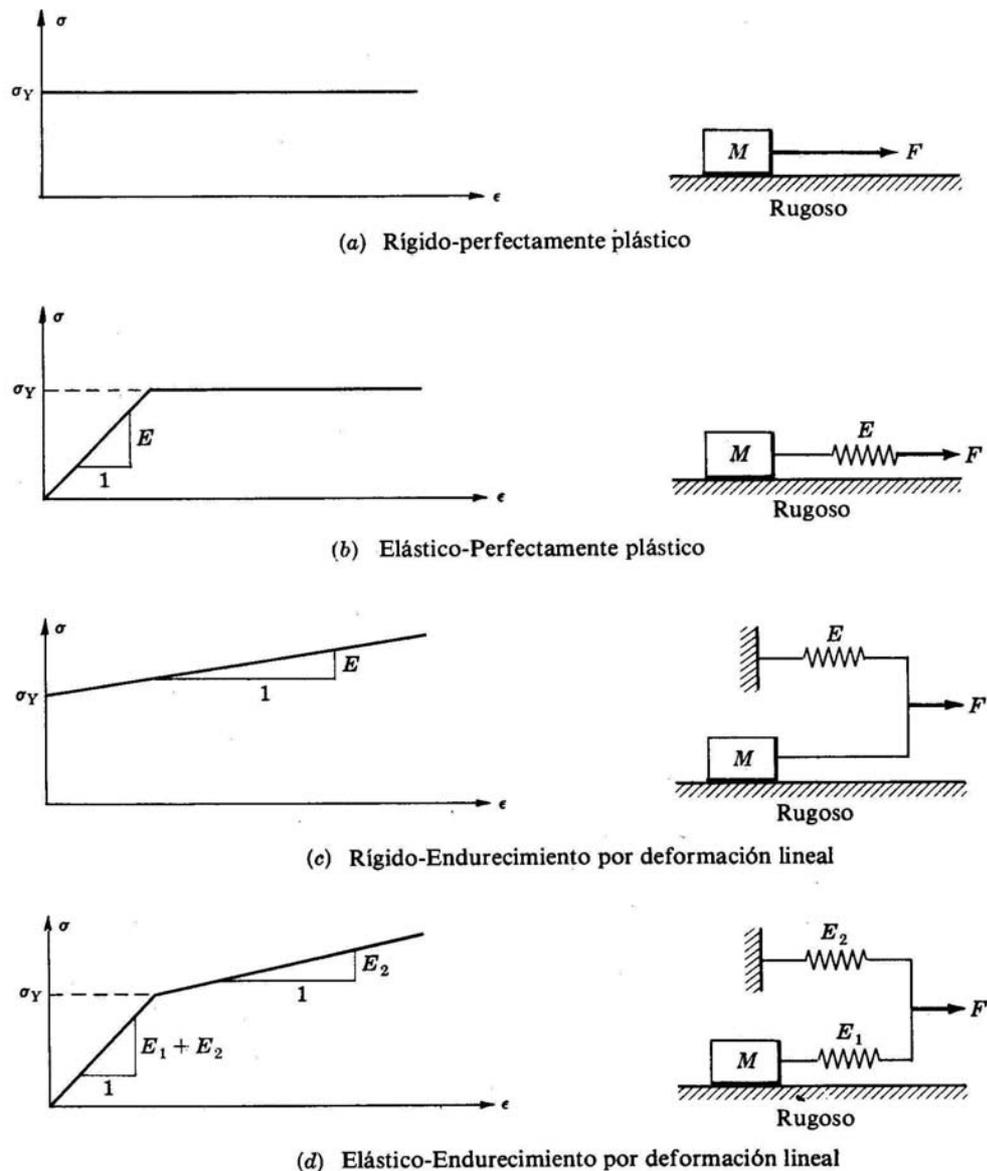


Figura 4.3.2.2: Diagramas tensión-deformación ideales

En el caso de problemas unidireccionales el parámetro material que define la deformación plástica puede ser obtenido del ensayo de tracción uniaxial. De acuerdo a Figura 4.3.2.2d el material exhibe, inicialmente, un comportamiento elástico lineal caracterizado por un módulo elástico $E=E_1+E_2$. Cuando las tensiones alcanzan la tensión de fluencia uniaxial σ_Y cualquier incremento de carga produce deformaciones gobernadas por el módulo tangente $E_T=E_2$ correspondiente a la reducción de rigidez del material. Para la relación tensión-deformación indicada en la figura luego del punto límite o de fluencia, el

módulo tangente E_T es la pendiente de la curva correspondiente a un determinado nivel de tensión. En particular, si se considera un incremento de deformación $d\varepsilon$ correspondiente con un incremento de tensión $d\sigma$, el módulo tangente E_T se define como

$$E_T = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \quad (4.3.2.3)$$

4.3.2.3 TEORIA DEL FLUJO DE LA PLASTICIDAD

En la Teoría de la Deformación de Hencky y Nadai, se establecen relaciones entre las tensiones totales y las deformaciones totales, dando lugar así a una formulación algebraica.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}) \quad (4.3.2.4)$$

Las deformaciones son descompuestas en una parte elástica y otra plástica definiéndose la segunda en términos del actual estados de tensiones. Este procedimiento es

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad ; \quad \varepsilon_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^p(\sigma_{ij}) \quad (4.3.2.5)$$

Consideraremos en lo sucesivo la llamada *Teoría del Flujo de la Plasticidad*. En contraposición a la teoría de la Deformación de la Plasticidad; en el caso de la Teoría del flujo y de comportamiento plástico, sólo la dirección de las deformaciones plásticas se obtiene a partir de σ como función del estado de tensiones. Esta formulación se basa en trabajos originales de Saint Venant en donde se definen los ejes principales de las deformaciones plásticas en dependencia de los ejes principales de las tensiones actuales. Estos conceptos fueron ampliados por Levy y Mises y luego por Prandtl y Reuss quienes establecen la hipótesis básica de la Teoría del Flujo la cual es la descomposición de la tasa de deformaciones totales en partes elástica y plástica:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^E + \varepsilon_{ij}^P \quad (4.3.2.6)$$

Para definir completamente un proceso elastoplástico deben formularse, además del comportamiento material en régimen elástico, la *condición de flujo*, la *ley de flujo* y la *regla de endurecimiento/ablandamiento*.

4.3.2.4 CONDICION DE FLUJO

El pasaje de proceso elástico a plástico se describe por medio de la condición de flujo

$$F = F(\sigma_{ij}, q) = 0 \quad (4.3.2.7)$$

en dependencia del estado de tensiones actuales dado por σ_{ij} y de las variables de estado q .

Una *condición de flujo* es en esencia una generalización a un estado de tensión tridimensional del concepto de límite elástico bajo carga en una dimensión. Fundamentalmente, un criterio de plasticidad o condición de flujo es una relación matemática entre las componentes del estado de tensión en un punto, la que se ha de satisfacer para que tenga lugar el comportamiento plástico. En general, un criterio de plasticidad se expresa por la ecuación

$$f(\sigma_{ij}) = C_Y \quad (4.3.2.8)$$

donde C_Y es conocida como la constante de fluencia, o bien por la ecuación

$$f_1(\sigma_{ij}) = 0 \quad (4.3.2.9)$$

en la que $f_1(\sigma_{ij})$ se denomina *función de fluencia*.

Para un material isótropo, la condición de plasticidad tiene que ser independiente de cualquier dirección y por lo tanto puede expresarse como una

función de los invariantes de tensión, o de otro modo, como una función simétrica de las tensiones principales. Así, en ecuación (4.3.2.5) puede aparecer como

$$f_2(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = C_Y \quad (4.3.2.10)$$

Además, la experimentación indica, en el caso de materiales metálicos, que la incipiente de plasticidad no está afectada por tensiones hidrostáticas moderadas, de tal manera que es posible presentar la condición de plasticidad como una función de los invariantes desviadores de tensión en la forma

$$f_3(II_{\Sigma D}, III_{\Sigma D}) = 0 \quad (4.3.2.11)$$

Estas condiciones de flujo o de plasticidad definen una superficie en el espacio de tensiones que se denomina superficie de fluencia.

Los primeros trabajos de plasticidad están relacionados con algunos aportes de Saint-Venant, aunque el primero que habló de criterios de roturas fue Coulomb en 1773, luego Rankine en 1873 utilizó los desarrollos previos de Coulomb para analizar la rotura de muros de hormigón.

Todos los estudios buscaban determinar de qué dependían las deformaciones plásticas o anelásticas. Las primeras propuestas afirmaban que dependían de II_{Σ} , luego estas teorías fueron evolucionando traduciéndose en propuestas de condiciones de plasticidad o criterios de fluencia.

De las numerosas condiciones de flujo que han sido propuestas, algunas de ellas son razonablemente sencillas y aún lo suficientemente exactas como para que sean de gran utilidad en la fluencia inicial de los materiales isótropos.

Se pueden diferenciar los criterios establecidos para metales de los criterios establecidos para los llamados geomateriales.

Criterios de fluencia para metales: El concepto de plasticidad fue aplicado inicialmente para metales, demostrándose que su rotura no está influenciada por la presión hidrostática o que la misma es despreciable. Esta importante

conclusión llevó a la formulación de los criterios de fluencia o de plasticidad independientes del primer invariante de tensiones, tales como los criterios de Tresca y Von Mises.

Criterios de fluencia para geomateriales: En los últimos años el término geomateriales es muy utilizado para materiales como suelos, rocas y hormigón. Estos materiales tienen en común y, en contraste con los metales, una gran sensibilidad en su comportamiento a la presión media, presentando distinta resistencia a tracción y compresión.

No obstante esta característica común existen diferencias entre suelos, por un lado, y rocas y hormigones, por el otro.

Los suelos sufren, usualmente, grandes deformaciones cortantes y es para ellos que se utiliza la denominación de “plásticos”.

Las rocas y hormigones, por otro lado, son materiales frágiles, excepto bajo alta compresión triaxial. Sin embargo, a pesar de que clásicamente se denomina material frágil a aquellos que rompen inmediatamente después de alcanzar el límite elástico, algunas rocas y hormigones pueden desarrollar deformaciones inelásticas significativamente mayores que las deformaciones elásticas.

Los hormigones, morteros y algunas rocas pueden desarrollar deformaciones permanentes que comparadas con las deformaciones elásticas son significativas. Estas deformaciones permanentes se deben a distintos mecanismos pudiendo mencionarse como muy importante la apertura y cierre de fisuras.

Los criterios de plasticidad dependientes de la tensión media, muy útiles en el caso de rocas, suelos y hormigones tuvieron su origen en la teoría de rotura de Mohr. Dicha teoría indica que la falla ocurre sobre un plano de un cuerpo cuando las tensiones de corte y normales llegan a una combinación crítica. Dicha expresión crítica puede indicarse por la función $\tau = \pm g(\sigma)$. Esta ecuación representa un par de curvas en el plano de Mohr, de tal manera que un estado de tensiones determinado por los tres círculos de Mohr es seguro si los tres círculos se encuentran dentro de las curvas llegando a un estado crítico cuando uno de los tres es tangente a las mismas. Estas curvas son las

envolventes de los círculos de Mohr representantes de la falla y son llamadas, por lo tanto, envolventes de falla de Mohr. Otro criterio dependiente de la tensión media es el de Drucker-Prager.

En este trabajo se describen los criterios de Tresca, Von Mises, Drucker-Prager y Mohr-Coulomb y, se utilizan en el análisis numérico del *pull-out test* los criterios de Von Mises y de Drucker Prager.

(1) CRITERIO DE TRESCA ó Teoría de corte máximo

Tresca desarrolló su teoría para metales publicando su famoso trabajo en 1864. Esta afirma que el comportamiento plástico de un metal comienza cuando la tensión de corte máxima alcanza un valor crítico C_Y . Matemáticamente, la condición se expresa en su forma más sencilla cuando se da en función de las tensiones principales. Así, para $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$, el criterio de Tresca está dado por

$$\frac{1}{2} (\sigma_I - \sigma_{III}) = C_Y \quad (4.3.2.12)$$

siendo $C_Y = cte$.

Al relacionar la constante C_Y con el límite elástico a tracción uniaxial, toma el valor $C_Y = \sigma_Y/2$. Por lo tanto, el criterio de Tresca adopta la forma

$$\sigma_I - \sigma_{III} = \sigma_Y \quad (4.3.2.13)$$

En el caso de estado de corte puro la constante C_Y es igual a k , y el criterio de Tresca se escribe en la forma

$$\sigma_I - \sigma_{III} = 2k \quad (4.3.2.14)$$

donde k representa la máxima resistencia de corte que se obtiene del ensayo de corte puro.

Generalizando la ecuación (4.3.2.14) a todas las tensiones cortantes obtenemos para el criterio de Tresca la representación de un hexágono como se indica en la Figura 4.3.2.3

El gran problema del criterio de Tresca, desde el punto de vista numérico, son las esquinas que complican su implementación en códigos computacionales.

(2) CRITERIO DE VON MISES o Teoría de la Energía de distorsión

Aunque es Von Mises quien lo hace conocido al criterio, en realidad éste es de Huber, Levy, Hencky.

Esta condición afirma que la deformación plástica comienza cuando el segundo invariante del desviador de tensiones alcanza un valor crítico. Matemáticamente, la condición plástica de Von Mises establece que

$$II_{\Sigma D} = C_Y \quad (4.3.2.15)$$

que escrita en función de las tensiones principales es

$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 = 6C_Y \quad (4.3.2.16)$$

Respecto al límite elástico a tracción uniaxial, se prueba fácilmente que la ecuación (4.3.2.16) da lugar a

$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 = 2\sigma_Y^2 \quad (4.3.2.17)$$

También, en relación con el valor del límite elástico a corte puro k , la condición de Von Mises (4.3.2.16) aparece en la forma

$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 = 6k^2 \quad (4.3.2.18)$$

donde k representa la máxima resistencia de corte que se obtiene del ensayo de corte puro. En dicho estado tensional no se activan tensiones principales y sólo se activan tensiones fuera de la diagonal principal.

La representación deviatorica del criterio de Von Mises está dada por un círculo como se indica en Figura 4.3.2.3.

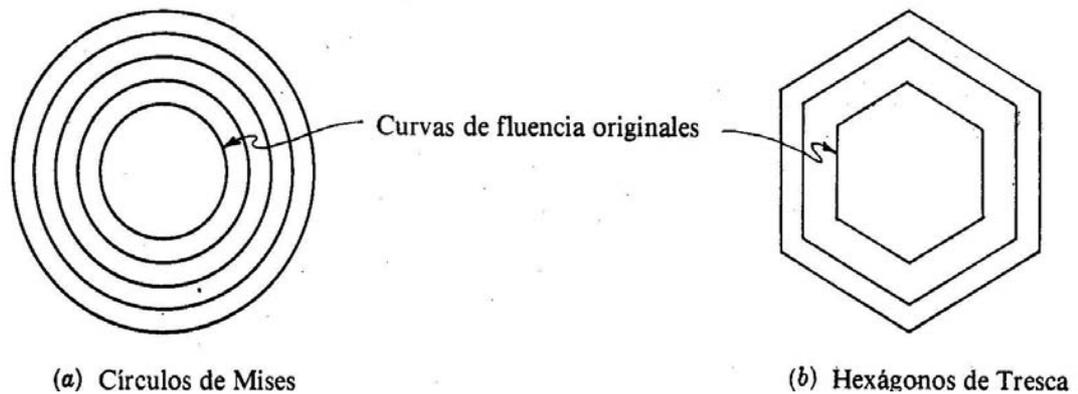


Figura 4.3.2.3: Representación Deviatorica de los Criterios de Von Mises y Tresca

Computacionalmente es más fácil trabajar con un círculo que con un hexágono. Los criterios de Tresca y Von Mises coinciden en los vértices del hexágono pero no en los puntos intermedios, esta diferencia aparece por la influencia en $\|_{SD}$ de la tensión normal intermedia. Ensayos realizados en metales han demostrado que esa tensión intermedia tiene influencia, entonces el criterio de Von Mises es más preciso para representar la falla en metales que el de Tresca.

En Figura 4.3.2.4 se indica la representación hidrostática del criterio de Von Mises, el cual no depende del primer invariante (I_1), razón por la cual no es adecuado para materiales cohesivos.

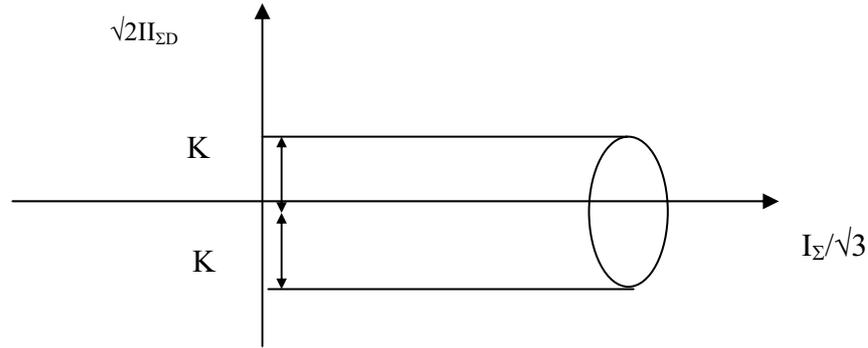


Figura 4.3.2.4: Representación Hidrostática del Criterio de Von Mises

A continuación se analiza el criterio de Von Mises en *estado plano de tensiones* para los casos de compresión y tracción uniaxial, corte puro y compresión biaxial, suponiendo siempre que

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

Recordando el criterio seguido por Von Mises para el cual la superficie de fluencia tiene la expresión

$$II_{\Sigma D} = \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 = k^2 \quad (4.3.2.19)$$

- Compresión uniaxial: $\sigma_3 < 0$ y $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0$

$$II_{\Sigma D} = \frac{1}{6}[\sigma_3^2 + \sigma_3^2] = k^2 = \frac{1}{6}[f_c^2 + f_c^2] = \frac{1}{3}f_c^2 \Rightarrow II_{\Sigma D} = \frac{1}{3}\sigma_Y^2 \quad (4.3.2.20)$$

- Tracción uniaxial: $\sigma_1 < 0$ y $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0$

$$II_{\Sigma D} = \frac{1}{6}[\sigma_1^2 + \sigma_1^2] = k^2 = \frac{1}{6}[f_t^2 + f_t^2] = \frac{1}{3}f_t^2 \Rightarrow II_{\Sigma D} = \frac{1}{3}\sigma_Y^2 \quad (4.3.2.21)$$

Nótese que tanto en el caso de compresión como de tracción uniaxial se arriba al mismo valor de $II_{\Sigma D}$. Si el material es isotrópico resulta

$$f_c = f_t = \sigma_Y \text{ y por lo tanto } II_{\Sigma D} = \frac{1}{3} \sigma_Y^2 = K^2 \text{ con lo cual } K = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_Y \quad (4.3.2.22)$$

De esta manera se encuentra el parámetro k del criterio de Von Mises.

- Corte Puro $\sigma_{12} \neq 0$ y $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0$

Reemplazando en el criterio de Von Mises obtenemos

$$II_{\Sigma D} = \sigma_{12}^2 = k^2 = \frac{\sigma_Y^2}{3} = s^2 \Rightarrow s = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}} \quad (4.3.2.23)$$

Esto significa que la resistencia al corte puro del metal es menor en el factor $1/\sqrt{3}$ a la del ensayo uniaxial de tracción o compresión.

- Compresión biaxial:

$$\sigma_1 \text{ y } \sigma_2 \neq 0 \text{ y } \sigma_3 = 0$$

$$II_{\Sigma D} = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - 0)^2 + (0 - \sigma_1)^2] = k^2 \quad (4.3.2.24)$$

Sustituyendo $k = \sigma_Y / \sqrt{3}$

$$6II_{\Sigma D} = (\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) + \sigma_2^2 + \sigma_1^2 = 6 \frac{\sigma_Y^2}{3} \quad (4.3.2.25)$$

$$\text{luego } 2\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = 6k^2 = 2\sigma_Y^2 \quad (4.3.2.26)$$

Dividiendo por $2 \sigma_Y^2$

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_Y}\right)\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_Y}\right) + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_Y}\right)^2 = 1 \quad (4.3.2.27)$$

Esta representación da una elipse en el plano de tensiones $\sigma_1 - \sigma_2$ y se indica en la Figura 4.3.2.5

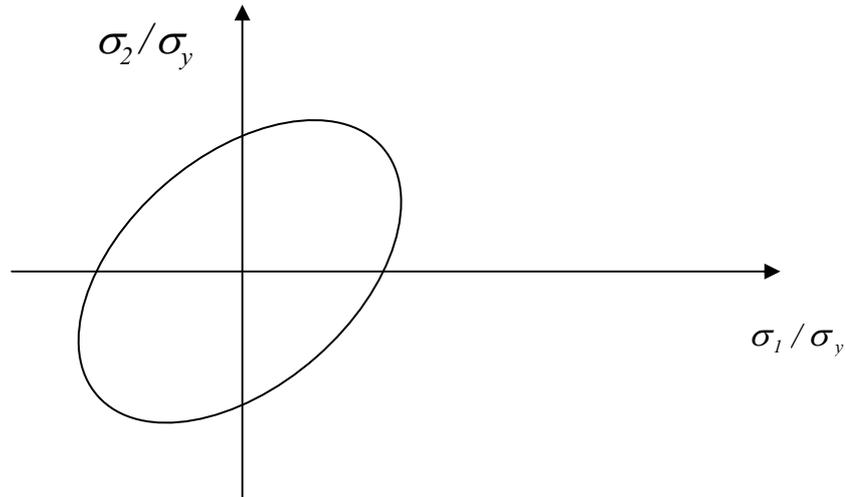


Figura 4.3.2.5: Representación del criterio de Von Mises para compresión biaxial

(3) CRITERIO DE DRUCKER-PRAGER

La condición de fluencia de Drucker-Prager, a diferencia del criterio de Von Mises considera la dependencia del primer invariante. La formulación del criterio de Drucker-Prager es

$$F = \frac{2 \operatorname{sen} \phi}{\sqrt{3}(3 - \operatorname{sen} \phi)} I_{\Sigma} + II_{\Sigma}^{1/2} - \frac{6 c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \operatorname{sen} \phi)} = 0 \quad (4.3.2.28)$$

Donde c y ϕ son cohesión y ángulo de fricción interna del material respectivamente.

Llamando

$$\alpha = \frac{2 \operatorname{sen} \phi}{\sqrt{3}(3 - \operatorname{sen} \phi)} I_{\Sigma} \quad (4.3.2.29)$$

y

$$\kappa = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \operatorname{sen} \phi)} \quad (4.3.2.30)$$

entonces el criterio puede expresarse de la forma

$$\alpha I_{\Sigma} + II_{\Sigma}^{1/2} - \kappa = 0 \quad (4.3.2.31)$$

La representación deviatorica del criterio de Drucker-Prager es un círculo al igual que la representación deviatorica del criterio de Von Mises.

La influencia del primer invariante que diferencia ambos criterios, se traduce en la forma de la representación hidrostática que en el caso del criterio de Drucker-Prager indica crecimiento de $II_{\Sigma D}$ con el incremento de la presión hidrostática. A continuación se obtiene la intersección con los ejes I_{Σ} e $II_{\Sigma D}$ de dicha curva.

Si $II_{\Sigma D} = 0$ entonces

$$I_{\Sigma} = \frac{\kappa}{\alpha} = \frac{6 \cos \phi}{2 \operatorname{sen} \phi} c = \frac{3c}{\operatorname{tg} \phi} \quad (4.3.2.32)$$

Si $I_{\Sigma} = 0$ entonces

$$II_{\Sigma D} = \left[\frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \operatorname{sen} \phi)} \right]^2 = \kappa^2 \quad (4.3.2.33)$$

La representación en el espacio de tensiones principales es un cono recto como se indica en Figura 4.3.2.6.

(4) CRITERIO DE MOHR-COULOMB

La condición de fluencia de Mohr-Coulomb puede ser expresada en el espacio de tensiones principales mediante la expresión

$$f(\sigma, \kappa) = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \operatorname{sen} \phi(\kappa) - c(\kappa) \cos \phi_0 \quad (4.3.2.34)$$

donde c y ϕ son la cohesión y el ángulo de fricción interna, respectivamente, y ϕ_0 es el ángulo de fricción interna inicial.

La representación de la superficie de fluencia en el espacio de tensiones principales es una pirámide hexagonal como se indica en Figura 4.3.2.6.

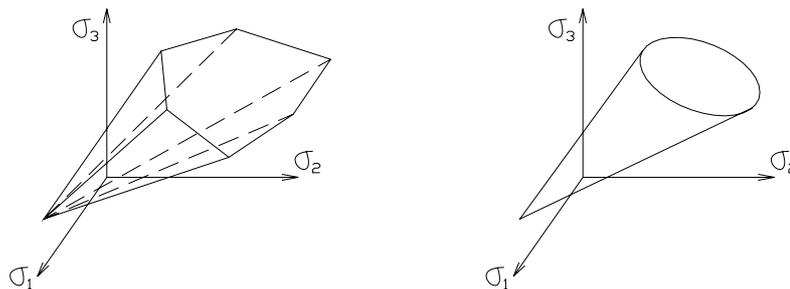


Figura 4.3.2.6: Representación de las superficies de fluencia de Mohr-Coulomb y Drucker-Prager en el espacio de tensiones principales.

4.3.2.5 LEY DE FLUJO

Cuando el estado de tensiones alcanza la superficie de fluencia, el material tiene deformaciones plásticas, también llamadas *flujo plástico*. En la teoría de la plasticidad el cambio de deformaciones plásticas se define mediante la *ley de flujo*, a partir del potencial plástico Q

$$\varepsilon_{ij}^P = \lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} = \lambda m \quad (4.3.2.35)$$

El escalar λ sirve de factor entre el gradiente y el incremento de deformaciones plásticas. Dado que λ crece monótonicamente, su tasa $\dot{\lambda}$ no es negativa.

La ecuación (4.3.2.35) deriva de la llamada formulación de tasa de la ley del flujo. En general la función del potencial plástico se expresa como una función de los invariantes de tensiones. Para algunos materiales la función de potencial plástico Q y la función de fluencia F , pueden ser iguales, en cuyo caso se habla de *flujo asociado de la plasticidad*

Una interpretación matemática del factor $\dot{\lambda}$ deriva, en realidad, de la formulación variacional de la ley del flujo, según la cual

$$(\sigma_{ij} - \sigma'_{ij}) : \varepsilon_{ij}^P \geq 0 \quad \forall \sigma'_{ij} \in B\{q\} \quad (4.3.2.36)$$

la ecuación (4.3.2.36) se basa en el *Principio de Máxima Disipación Plástica* que equivale a la condición de convexidad de la superficie de fluencia y a la condición de normalidad en el espacio de tensiones.

La solución de la desigualdad indicada en ecuación (4.3.2.36) se obtiene de la proyección de la tensión elástica σ_{ij}^E en la región $B\{q\}$ por medio de la energía métrica definida por el tensor de flexibilidad C_{ij} . Esta solución equivale a minimizar la energía $E(\sigma_{ij})$

$$\text{mín } E(\sigma_{ij}) \quad (4.3.2.37)$$

con la condición auxiliar

$$\sigma_{ij} \in B(q) \quad (4.3.2.38)$$

donde

$$E = \frac{1}{2}(\sigma_{ij}^E - \sigma_{ij}^P) : c_{ij} : (\sigma_{ij}^E - \sigma_{ij}^P) = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^P : \varepsilon_{ij}^P \quad (4.3.2.39)$$

la solución de la ecuación (4.3.2.39) con la condición dada por ecuación (4.3.2.38) se encuentra a partir del cálculo variacional utilizando la ecuación de Lagrange. Para ello se define el problema de la forma auxiliar

$$L(\sigma_{ij}; \lambda) = E(\sigma_{ij}) + \lambda F(\sigma_{ij}; q) \quad (4.3.2.40)$$

La condición extrema se encuentra haciendo estacionaria la ecuación (4.3.2.40) con lo cual

$$\frac{\partial E}{\partial \sigma_{ij}} + \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = 0 \quad (4.3.2.41)$$

pero

$$\frac{\partial E}{\partial \sigma_{ij}} = -c_{ij} : (\sigma_{ij}^E - \sigma_{ij}^P) = -\varepsilon_{ij}^P \quad (4.3.2.42)$$

luego

$$-\varepsilon_{ij}^P + \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = 0 \Rightarrow \varepsilon_{ij}^P = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.3.2.43)$$

de donde se deduce que λ está relacionada con los parámetros de Lagrange del cálculo variacional y se obtiene de la estacionalidad del problema auxiliar según ecuación (4.3.2.43) que resulta de minimizar la energía simétrica E con la condición auxiliar dada por ecuación (4.3.2.38).

En realidad la ecuación (4.3.2.37) define las bases del Método de Integración de Tensiones conocido como Backward Euler o Closest Point Projection.

La ecuación (4.3.2.37) con la ecuación (4.3.2.38) puede también ser planteada para el caso de flujo no asociado, que corresponde al caso en que la

proyección de σ_{ij}^E a σ_{ij} no se realiza en la métrica energéticamente definida por C_{ij} sino por un tensor de flexibilidad transformada

$$c_{ijA} = A_{ij} : c_{ij} \quad (4.3.2.44)$$

donde el tensor A_{ijkl} es un operador de transformación de cuarto orden que define la relación

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} = m = A_{ijkl}^{-1} : n = A_{ijkl}^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.3.2.45)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (4.3.2.44), la ecuación (4.3.2.36) puede escribirse ahora como

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}') : c_{ijA} : (\sigma_{ij}^E - \sigma_{ij}) \geq 0 \quad \forall \sigma_{ij}' \in B(q) \quad (4.3.2.46)$$

y la ecuación (4.3.2.39) queda

$$E(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^E - \sigma_{ij}) : c_{ijkl}^A : (\sigma_{ij}^E - \sigma_{ij}) \quad (4.3.2.47)$$

de donde resulta, luego de plantear la estacionalidad del problema auxiliar,

$$\varepsilon_{ij}^P = \lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}}$$

ya que de ecuación (4.3.2.47) se obtiene

$$\frac{\partial E}{\partial \sigma} = -c_{ijA} : (\sigma_{ij}^E - \sigma_{ij}) = -A_{ij} : c_{ij} : (\sigma_{ij}^E - \sigma_{ij}) = -A_{ij} : \varepsilon_{ij}^P \quad (4.3.2.48)$$

luego

$$\frac{\partial E}{\partial \sigma} + \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma} = -A_{ij} : \varepsilon_{ij}^P + \lambda n = 0 \quad (4.3.2.49)$$

premultiplicando ambos miembros por A_{ij}^{-1} y teniendo en cuenta la ecuación (4.3.2.45) resulta

$$\varepsilon_{ij}^P = \lambda A_{ij}^{-1} n = \lambda m = \lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \quad (4.3.2.50)$$

4.3.2.6 REGLA DE ENDURECIMIENTO/ABLANDAMIENTO

Los materiales ingenieriles muestran en general una transición continua de comportamiento elástico o plástico ideal. Esta transición es lo que se denomina usualmente endurecimiento.

En realidad los materiales ingenieriles denotan luego de alcanzada la resistencia máxima, que en el marco de la elastoplasticidad correspondería al punto donde se alcanza el comportamiento plástico perfecto, una reducción de la resistencia bajo crecimiento continuo de la deformación aplicada. Estas observaciones son obtenidas en ensayos de probetas de materiales donde los registros corresponden a fuerzas y desplazamientos, es decir, son registros de problemas estructurales. Antes de la descripción continua, estos fenómenos estructurales son modelados al nivel de relaciones tensión-deformación, lo cual consiste en un mapeo de las relaciones carga-desplazamiento en diagramas tensión-deformación, esto es, las tensiones son computadas como el cociente entre las fuerzas y el área transversal del material o estructura virgen, y las deformaciones como el cociente entre el desplazamiento y la longitud del espécimen. Esto conduce, obviamente a una pendiente negativa del diagrama tensión-deformación, que usualmente es llamado ablandamiento.

Para describir la evolución de los parámetros de estado durante los fenómenos de endurecimiento/ablandamiento se utilizan dos criterios alternativos. Por un lado, el llamado endurecimiento/ablandamiento de deformación y por el otro, el trabajo de endurecimiento/ablandamiento.

En el primer caso los parámetros de estado tienen una ley de evolución definida de la forma

$$\dot{q} = \lambda \sqrt{m : m} \quad (4.3.2.51)$$

Por el contrario en el caso del trabajo de endurecimiento/ablandamiento, la evolución de q viene dada como

$$\dot{q} = \lambda \sigma_{ij} : m \quad (4.3.2.52)$$

En el caso más general, cuando se tiene más de un parámetro de estado, la ley de evolución de q viene dada por

$$\dot{q} = H_{ij} : \varepsilon_{ij}^P = \lambda H_{ij} : m \quad (4.3.2.53)$$

donde H es un tensor cuyo orden varía en función del orden del tensor q .

4.3.2.6 CONDICION DE CONSISTENCIA DIFERENCIAL

De la condición de fluencia $F=0$ se deduce la condición de consistencia plástica que establece que la evolución \dot{F} debe ser también nula al cabo del proceso elastoplástico

$$\dot{F} = 0 \quad (4.3.2.54)$$

Tomando aproximación en serie de Taylor para $\dot{F} = 0$ y cortando la serie en los términos de primer orden, resulta

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} : \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial F}{\partial q} : \dot{q} = 0 \quad (4.3.2.55)$$

de la condición de Prandtl-Reuss se deduce

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^E + \varepsilon_{ij}^P \quad (4.3.2.56)$$

por lo tanto premultiplicando ambos miembros por el tensor E

$$E_{ijkl}\varepsilon_{ij} = E_{ijkl} : \varepsilon_{ij}^E + E_{ijkl} : \varepsilon_{ij}^P = E_{ijkl} : \varepsilon_{ij}^E + E_{ijkl} : \lambda m \quad (4.3.2.57)$$

La ecuación (4.3.2.57) puede escribirse

$$\sigma_{ij}^E = \sigma_{ij} + \sigma_{ij}^P \quad \text{con lo cual} \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^E - \sigma_{ij}^P \quad (4.3.2.58)$$

La ecuación (4.3.2.58) permite observar que lo que es aditivo en deformaciones es sustractivo en tensiones.

Retomando la ecuación de consistencia (4.3.2.55)

$$\dot{F} = n : \dot{\sigma}_{ij} + r : \lambda \dot{H}_{ij} : m = n : E_{ijkl} : (\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\lambda} m) + r : \lambda \dot{H} : m = 0 \quad (4.3.2.59)$$

donde

$$r = \frac{\partial F}{\partial q} \quad ; \quad n = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$$

por lo tanto

$$\lambda = \frac{n : E : \varepsilon_j}{-n : H : m + n : E : m} = \frac{n : E : \varepsilon}{E_p + E_n} \quad (4.3.2.60)$$

reemplazando la ecuación (4.3.2.60) en ecuación (4.3.2.58) expresada como

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^E - \sigma_{ij}^P = E_{ijkl} : (\varepsilon_{ij} - \lambda m) \quad (4.3.2.61)$$

queda

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} - \frac{E_{ijkl} : m_{kl}}{E_p + E_n} (n_{op} E_{opqr} \dot{\varepsilon}_{qr}) = E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} - \left(\frac{1}{E_p + E_n} \right) E_{ijkl} m_{kl} n_{op} E_{opqr} \dot{\varepsilon}_{qr} \quad (4.3.2.62)$$

cambiando los subíndices

$$\dot{\sigma}_{ij} = \left[E_{ijkl} - \left(\frac{1}{E_p + E_n} \right) E_{ijqr} m_{qr} n_{op} E_{opkl} \right] \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (4.3.2.63)$$

donde

$$E_{ijkl}^{EP} = E_{ijkl} - \left(\frac{1}{E_p + E_n} \right) E_{ijqr} m_{qr} n_{op} E_{opkl} \quad (4.3.2.64)$$

es el tensor de cuarto orden operador material tangente elastoplástico que se anula cuando no hay plasticidad.

La diferencia indicada en el factor entre corchetes de la ecuación (4.3.2.63) indica la degradación del tensor E . Si se realiza la operación distributiva en dicha expresión se obtiene la diferencia entre el predictor elástico y el corrector plástico.

4.3.2.7 ENDURECIMIENTO ISOTROPICO

Se dice que existe endurecimiento isotrópico cuando hay un cambio de tamaño de la superficie de fluencia sin desplazamiento en el espacio de tensiones.

4.3.2.8 ENDURECIMIENTO CINEMATICO

El endurecimiento plástico cinemático ocurre cuando existe un desplazamiento de la superficie de fluencia sin cambio de volumen.

CAPITULO 5
METODO DE LOS ELEMENTOS
FINITOS

CAPITULO 5

METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

5.1 INTRODUCCION

En este Capítulo se realiza, en el punto 5.2, una descripción sintética de la discretización del problema continuo utilizando el Método de los Elementos Finitos por ser ésta la metodología de análisis utilizada en el capítulo siguiente. En el punto 5.3 se indican, esquemáticamente, los pasos necesarios para la implementación computacional del método.

Dadas las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento mecánico de un sólido con sus condiciones de borde existen básicamente para su resolución dos caminos posibles

- a) Encontrar la solución exacta
- b) Buscar una solución aproximada al problema planteado

Dentro de la alternativa b) es posible resolver las ecuaciones diferenciales, que gobiernan el comportamiento mecánico del medio continuo, trabajando con una formulación integral equivalente a un planteo débil o “promediado” de la forma fuerte o diferencial. Es decir, la inexistencia de una solución exacta de validez punto a punto del continuo obliga a una consideración “estructural”, integral o débil en la cual la solución tiene validez en el conjunto pero no en cada punto. A pesar de la gran simplificación de la forma integral respecto de la diferencial, la solución de este problema continúa siendo compleja. Por ese motivo las técnicas de solución que prevalecen son las numéricas frente a las analíticas. En otras palabras, las ecuaciones íntegro-diferenciales que definen el problema estructural en forma débil son reemplazadas mediante técnicas y métodos numéricos (Rayleigh Ritz; residuos ponderados, etc.) en ecuaciones algebraicas de fácil solución. Esta es precisamente la base del Método de los Elementos Finitos, el cual en las últimas cuatro décadas se ha convertido en el

procedimiento numérico más utilizado para la resolución numérica aproximada del sistema de ecuaciones diferenciales que expresa el comportamiento de un problema físico y es, por ende, muy utilizado en el análisis de estructuras, según Klaus-Bathe, (1982) Hughes, (1987), Zienkiewics & Taylor, (1994), entre otros.

5.2 METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

De acuerdo a lo indicado, el Método de los Elementos Finitos permite obtener los valores de tensiones y deformaciones como una aproximación de la solución exacta. Sólo en los casos especiales de elementos de reticulados, vigas, pórticos este método conduce a soluciones que coinciden con los métodos analíticos. La formulación del método puede hacerse de acuerdo a las siguientes metodologías generales

- a) Equilibrio
- b) Principio de la Energía Potencial Total
- c) Principio de los Trabajos Virtuales
- d) Método de los Residuos Ponderados de Galerkin

5.2.1 METODO BASADO EN EQUILIBRIO

El método de equilibrio se basa en satisfacer el equilibrio de cada elemento individual y de todo el sistema. Es un método sencillo que puede interpretarse desde un punto de vista físico.

El planteo general de un problema estructural involucra: desplazamientos y cargas externas por un lado, y campos de tensiones y de deformaciones, por el otro. Dichas magnitudes están relacionadas en cualquier problema de continuos elásticos; elastoplásticos; elastoviscopoplásticos, etc., a través de las ecuaciones de equilibrio, ecuaciones de compatibilidad geométrica y de las ecuaciones constitutivas.

Para el caso de pequeñas deformaciones, es decir, problemas de linealidad geométrica, las ecuaciones de compatibilidad que relacionan desplazamientos con deformaciones son lineales. Por lo tanto, puede admitirse dentro de

márgenes de error admisible, que la configuración deformada ó euleriana coincide con la configuración de referencia o lagrangiana. Como consecuencia las ecuaciones de equilibrio pueden establecerse con respecto a la configuración no deformada de la estructura considerada, en lugar de hacerlo con respecto a la configuración deformada.

Si, además el material es lineal elástico, es decir, se trata de un problema de linealidad física, las ecuaciones constitutivas serán lineales, ocurriendo lo mismo para las ecuaciones de equilibrio a nivel estructural. De esta manera se dice que se está en presencia de un análisis estructural lineal. Esto significa que una duplicación de la acción (ya sea en fuerzas o desplazamientos) provoca una duplicidad de la reacción correspondiente.

Reemplazando las ecuaciones de compatibilidad en las ecuaciones constitutivas y las ecuaciones resultantes en las de equilibrio, se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales en términos del campo de desplazamientos, a partir del cual se podría obtener el campo de deformaciones y de tensiones. Sin embargo, y para la gran mayoría de las estructuras tridimensionales, la solución del sistema de ecuaciones diferenciales con consideración de las condiciones de contorno es imposible. Por esto surge la necesidad de una solución numérica o aproximada del problema. Esta es, precisamente, la base del Método de los Elementos Finitos. En este método y desde el punto de vista del equilibrio el primer paso para la obtención de la solución aproximada es la discretización del dominio en una serie de nudos, nodos o puntos que dan lugar a la definición de subdominios o elementos. Entonces, y de acuerdo a la discretización planteada, se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas en lugar de diferencial. La función incógnita, en este caso el campo de desplazamientos (pero bien podría ser otra si el problema no es estructural), es aproximada localmente en cada uno de los subdominios por fórmulas de interpolación que están expresadas en términos de los valores que toma la función y sus posibles derivadas en los nodos de los elementos. Este sistema puede ser considerado como las ecuaciones de equilibrio expresadas en términos de desplazamientos nodales. La solución del sistema de ecuaciones algebraicas resultantes permite determinar los valores de las incógnitas (desplazamientos nodales) con los

cuales, y en base a las funciones de interpolación, pueden determinarse las otras cantidades desconocidas (deformaciones; tensiones; etc.)

El planteo indicado permite arribar al sistema de ecuaciones del tipo

$$\{P\} = [K] \cdot \{a\} \quad (5.2.1)$$

donde $\{P\}$ = es el vector de acciones (fuerzas; momentos; temperatura; etc.)

$[K]$ = es la matriz de rigidez del sistema

$\{a\}$ = es el vector de desplazamientos nodales incógnita

El *Método de la Rigidez* directa es un método de análisis estructural matricial que se basa en el método de las deformaciones y consiste en considerar a cada elemento aislado de la estructura, de tal manera de establecer una ecuación matricial que defina el comportamiento de cada elemento individual. Luego, considerando la interacción de cada elemento con los restantes de acuerdo a la forma en que ellos están conectados en el sistema estructural, puede definirse el comportamiento global de la estructura que conduce a la solución del problema. Este método, se basa en una interpretación física ó intuitiva del problema para la obtención de la matriz de rigidez. Su aplicación involucra los siguientes pasos:

1. Identificación estructural (acciones; geometría; materiales constitutivos; condiciones de borde).
2. Evaluación de las ecuaciones matriciales de cada elemento (matriz de rigidez de cada elemento y vector de cargas nodales equivalentes).
3. Ensamble del sistema de ecuaciones (montaje de la matriz de rigidez global y del vector de cargas global de toda la estructura).
4. Reducción del sistema de ecuaciones mediante consideración de condiciones de borde.
5. Solución del sistema reducido de ecuaciones lo cual involucra la inversión de la matriz de rigidez para la obtención del vector de desplazamientos nodales.
6. Evaluación de las fuerzas de los elementos.

7. Evaluación de reacciones de apoyo mediante la solución del sistema extendido de ecuaciones.
8. Evaluación de magnitudes secundarias (deformaciones; tensiones; etc.).

5.2.2 MÉTODOS BASADOS EN CONCEPTOS ENERGETICOS

El Método de Equilibrio obtiene la matriz de rigidez a través de una interpretación física. Ello es válido dentro de ciertos sistemas como los constituidos por elementos lineales. En el caso de sistemas planos o tridimensionales es necesaria una interpretación matemática del problema basada en conceptos energéticos y variacionales para obtener un procedimiento general y sistemático que permita obtener matrices de rigidez para elementos de forma, geometría e incógnitas arbitrarias.

La expresión integral de equilibrio en problemas de elasticidad bidimensional puede obtenerse, como se indicó precedentemente, haciendo uso del Principio de los Trabajos Virtuales (PTV), que no es otra cosa que la estacionalidad del Potencial Total de Energía, lo cual es un planteo más general que excede el ámbito de la Ingeniería Estructural. En esta sección se planteará el problema a través de la utilización del PTV.

Teniendo en cuenta las tensiones y deformaciones que contribuyen al trabajo virtual de la estructura, la expresión del PTV puede escribirse como:

$$\iint_A (\delta \varepsilon_x \sigma_x + \delta \varepsilon_y \sigma_y + \delta \gamma_{xy} \tau_{xy}) t \, dA = \iint_A (\delta u b_x + \delta v b_y) t \, dA + \oint_l (\delta u t_x + \delta v t_y) t \, ds + \sum_i (\delta u_i U_i + \delta v_i V_i) \quad (5.2.2)$$

El segundo miembro de la ecuación 5.2.2 representa el trabajo de las fuerzas repartidas por unidad de volumen b_x , b_y ; de las fuerzas repartidas sobre el contorno t_x , t_y ; y de las fuerzas puntuales U_i , V_i en virtud de los desplazamientos virtuales δu , δv . Desde el punto de vista matemático más general, esto representaría la forma estacionaria de la energía potencial de las acciones exteriores. El primer miembro, por otro lado, representa el trabajo que las tensiones σ_x , σ_y , τ_{xy} realizan sobre las deformaciones virtuales $\delta \varepsilon_x$, $\delta \varepsilon_y$ y

$\delta\gamma_{xy}$. A e l son el área y el contorno de la sección transversal del sólido y t su espesor. Haciendo también en este caso la analogía matemática, el primer miembro de la ecuación (5.2.2) representaría la estacionalidad de la energía interna de deformación de un medio continuo, respecto de cambios diferenciales y admisibles del campo de deformaciones expresados como gradientes del campo de desplazamientos. En problemas de tensión plana t coincide con el espesor real, mientras que en problemas de deformación plana es usual asignar a t un valor unidad.

La ecuación (5.2.2) puede escribirse en forma matricial como:

$$\iint_A \delta \varepsilon^T \sigma dA = \iint_A \delta u^T b t dA + \oint_l \delta u^T t t ds + \sum_i \delta u_i^T q_i \quad (5.2.3)$$

donde

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon &= [\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \gamma_{xy}]^T; \quad \delta u = [\delta u, \delta v]; \quad b = [b_x, b_y]^T \\ t &= [t_x, t_y]^T; \quad \delta u_i = [\delta u_i, \delta v_i]^T; \quad q_i = [U_i, V_i]^T \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

Puede observarse que, en este caso particular, en las integrales del PTV sólo intervienen primeras derivadas de los desplazamientos, lo que exige continuidad de clase C_0 a la aproximación de elementos finitos. En otros casos tales como los relacionados con flexión de vigas o placas las formas débiles o integrales del equilibrio involucran derivadas de orden superior de los desplazamientos y, por lo tanto, se requieren de formulaciones C^1 o superiores de elementos finitos.

A partir de la ecuación (5.2.3) se obtendrán, a continuación, las ecuaciones de la discretización. Primeramente se considerará la formulación del elemento triangular de tres nodos por ser el más sencillo y luego se considerará la formulación del elemento de cuatro nodos utilizado en el presente trabajo.

5.2.2.1 DISCRETIZACIÓN DE UNA ESTRUCTURA EN TRIÁNGULOS DE TRES NODOS.

La primera etapa del análisis es la discretización en elementos finitos con lo cual se obtiene la malla correspondiente que constituye una idealización de la geometría real. Por consiguiente, el análisis por elementos finitos reproduce el comportamiento de la malla o modelo matemático escogido, y no el de la estructura real. Para estimar el grado de precisión de la solución de elementos finitos a la exacta deberá comprobarse el error de la solución mediante indagación de los llamados errores “a priori” y a “posteriori”, de acuerdo a Klaus-Bathe, (1982), Zienkiewics & Taylor, (1994).

5.2.2.2 DISCRETIZACIÓN DEL CAMPO DE DESPLAZAMIENTOS

El elemento típico triangular denominado “constant strain” se caracteriza por sus tres nodos y sus coordenadas. Dichos nodos tienen en la malla arbitraria de elementos finitos, ver Figura 5.2.1, la numeración global i, j, k y las coordenadas $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$. La numeración global de los nodos i, j, k se corresponde con la identificación local 1, 2 y 3, respectivamente. En la práctica es usual utilizar la numeración local para el cálculo de las matrices del elemento y hacer uso de la correspondencia entre números locales y globales para el ensamblaje, de manera similar al cálculo matricial de estructuras.

Considerando un elemento aislado de la malla, como el indicado en la Figura 5.2.1, podemos expresar los dos desplazamientos cartesianos de un punto cualquiera del elemento en función de los desplazamientos de sus nodos como se indica en ecuaciones (5.2.5)

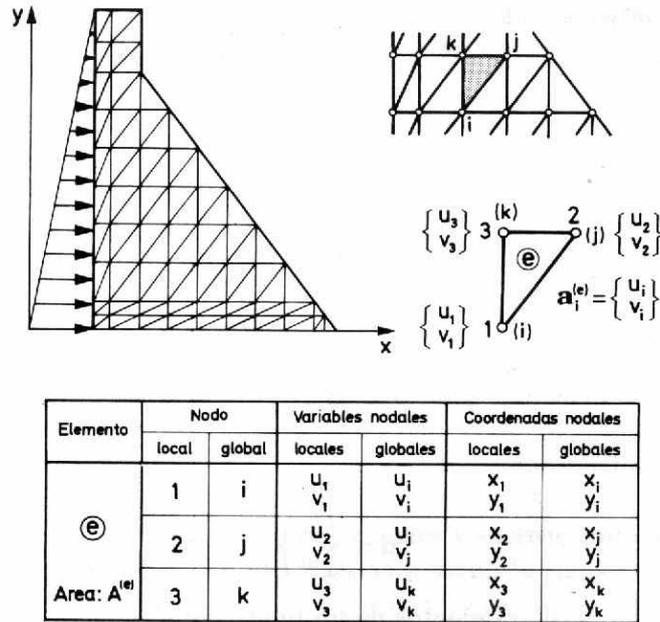


Figura 5.2.1: Discretización de una estructura en elementos triangulares de deformación constante. Variables nodales

$$\begin{aligned}
 u &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 \\
 v &= N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3
 \end{aligned}
 \tag{5.2.5}$$

donde (u_i, v_i) y N_i son los desplazamientos horizontal y vertical y N_i las funciones de forma del elemento. Por simplicidad se adoptan las mismas funciones de formas para definir la aproximación de los desplazamientos en las direcciones horizontal y vertical, respondiendo así a los argumentos de isotropía de desplazamientos y deformaciones.

La ecuación (5.2.5) puede escribirse matricialmente de la forma:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}
 \tag{5.2.6}$$

ó

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{a}^{(e)} \quad (5.2.7)$$

donde

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} \quad (5.2.8)$$

es el vector de desplazamientos de un punto del elemento

$$\mathbf{N} = [N_1, N_2, N_3]; \quad \text{con} \quad N_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (5.2.9)$$

las matrices de funciones de forma del elemento y del nodo i del elemento, respectivamente, y

$$\mathbf{a}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1^{(e)} \\ \mathbf{a}_2^{(e)} \\ \mathbf{a}_3^{(e)} \end{Bmatrix} \quad \text{con} \quad \mathbf{a}_i^{(e)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{v}_i \end{Bmatrix} \quad (5.2.10)$$

los vectores de desplazamientos nodales del elemento y de un nodo i .

\mathbf{N} y $\mathbf{a}^{(e)}$ están compuestos de tantas submatrices N_i y subvectores $\mathbf{a}_i^{(e)}$, respectivamente, como nodos tiene el elemento.

La expresión de las funciones de forma del elemento triangular de tres nodos se puede obtener como sigue. Los tres nodos del elemento definen una variación lineal del campo de desplazamientos

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \alpha_1 + \alpha_2 \mathbf{x} + \alpha_3 \mathbf{y} \\ \mathbf{v} &= \alpha_4 + \alpha_5 \mathbf{x} + \alpha_6 \mathbf{y} \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

Si suponemos que la interpolación de u y v se efectúa de idéntica manera, basta con obtener la expresión de las funciones de forma para uno de los dos desplazamientos. Así, por ejemplo, para el desplazamiento u se tiene que cumplir que sus valores en los nodos coincidan con las correspondientes incógnitas nodales,

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 \\ u_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2 \\ u_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3 \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

Resolviendo dicho sistema de ecuaciones y sustituyendo en ecuación (5.2.11) los valores encontrados para $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ se obtiene la siguiente expresión para u

$$u = \frac{1}{2A^{(e)}} [(a_1 + b_1 x + c_1 y)u_1 + (a_2 + b_2 x + c_2 y)u_2 + (a_3 + b_3 x + c_3 y)u_3] \quad (5.2.13)$$

donde $A^{(e)}$ es el área del elemento, y

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j, \quad b_i = y_j - y_k, \quad c_i = x_k - x_j; \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (5.2.14)$$

Comparando ecuación (5.2.5) con ecuación (5.2.13) se deduce

$$N_i = \frac{1}{2A^{(e)}} (a_i + b_i x + c_i y), \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.2.15)$$

La representación gráfica de las funciones de forma se muestra en Figura 5.2.2. Cabe observar que las funciones de forma toman el valor unidad sólo en el nodo al que corresponde y cero en los restantes nodos.

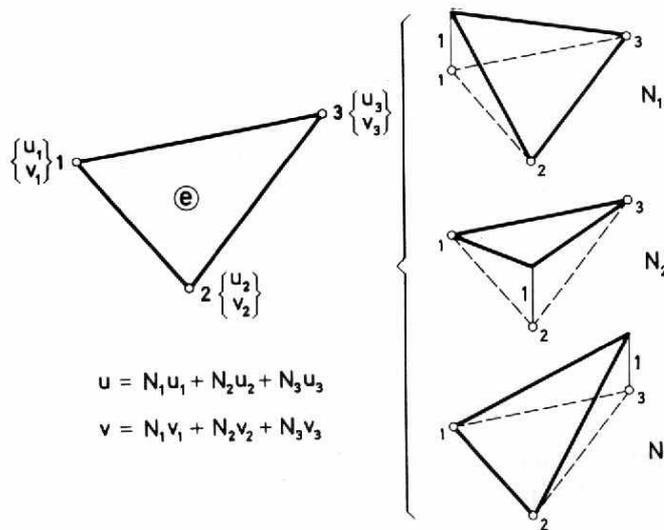


Figura 5.2.2: Funciones de forma del elemento triangular de tres nodos

5.2.2.3 DISCRETIZACION DEL CAMPO DE DEFORMACIONES

Tomando la ecuación 5.2.5 y reemplazándola en las ecuaciones diferenciales de deformaciones se obtiene

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} u_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x} u_3 \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial y} v_1 + \frac{\partial N_2}{\partial y} v_2 + \frac{\partial N_3}{\partial y} v_3 \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial y} u_1 + \frac{\partial N_1}{\partial x} v_1 + \frac{\partial N_2}{\partial y} u_2 + \frac{\partial N_2}{\partial x} v_2 + \frac{\partial N_3}{\partial y} u_3 + \frac{\partial N_3}{\partial x} v_3
 \end{aligned}
 \tag{5.2.16}$$

y en forma matricial

$$\varepsilon = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{array} \right\} \quad (5.2.17)$$

ó

$$\varepsilon = Ba^{(e)} \quad (5.2.18)$$

donde

$$B = [B_1, B_2, B_3] \quad (5.2.19)$$

es la matriz de deformación del elemento, y

$$B_i = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{array} \right] \quad (5.2.20)$$

es la matriz de deformación del nodo i .

B está compuesta de tantas submatrices B_i como nodos tiene el elemento. Particularizando las expresiones para el elemento triangular de tres nodos se obtiene

$$B = \frac{1}{2A^{(e)}} \left[\begin{array}{cccccc} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_1 & 0 & c_1 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{array} \right] \quad (5.2.21)$$

y, por consiguiente

$$B_i = \frac{1}{2A^{(e)}} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix} \quad (5.2.22)$$

5.2.2.4 DISCRETIZACION DEL CAMPO DE TENSIONES

La expresión discretizada del vector de tensiones en el interior del elemento se obtiene mediante sustitución directa de la ecuación (5.2.18) en la relación entre tensiones y deformaciones

$$\sigma = D\varepsilon = DBa^{(e)} \quad (5.2.23)$$

Si existieran tensiones o deformaciones iniciales la expresión extendida a utilizar sería

$$\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon^0) + \sigma^0 = DBa^{(e)} - D\varepsilon^0 + \sigma^0 \quad (5.2.24)$$

Puede apreciarse en ecuación (5.2.21) que las componentes de la matriz de deformaciones del elemento triangular de tres nodos son todas constantes, es decir, son independientes de la posición. Se deduce entonces que los campos de deformaciones y de tensiones son constantes en todo el elemento. Esto es consecuencia directa del tipo de elemento y de la linealidad asumida para el campo de desplazamientos. Por consiguiente, en zonas de alta concentración de tensiones será necesario utilizar una malla tupida para aproximar la solución de tensiones con suficiente precisión.

5.2.2.5 ECUACIONES DE EQUILIBRIO DE LA DISCRETIZACION

Para la obtención de las ecuaciones de equilibrio de la discretización partiremos de la expresión del PTV aplicada al equilibrio de un elemento aislado, como el de la Figura 5.2.3. Se destaca que aunque se analice un elemento triangular de tres nodos, la mayoría de las expresiones que se

obtendrán son completamente generales y aplicables a cualquier elemento bidimensional.

Se supone que sobre el elemento triangular actúan fuerzas repartidas por unidad de área (fuerzas de cuerpo) b , y en sus lados fuerzas repartidas por unidad de longitud (fuerzas de superficie) t . Las fuerzas de superficie pueden ser: a) Debidas a fuerzas exteriores que actúan sobre los lados del elemento que forman parte del contorno exterior de la estructura, y b) Debidas a las fuerzas de interacción entre elementos que se transmiten a través de sus lados comunes. Estas últimas pueden ignorarse desde un principio pues se anulan en el ensamblaje.

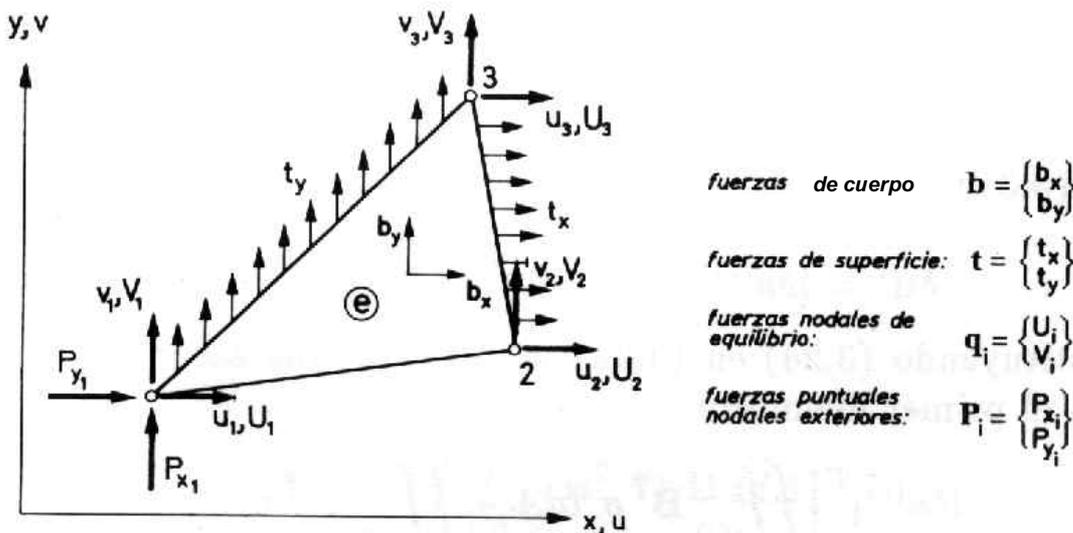


Figura 5.2.3: Fuerzas sobre un elemento triangular de tres nodos

Se supondrá que el equilibrio del elemento se establece únicamente en los nodos. Podemos entonces definir fuerzas puntuales que actúen en los nodos (denominadas fuerzas nodales) que equilibren las fuerzas debidas a la deformación del elemento y al resto de las fuerzas actuantes sobre el mismo. El PTV aplicado al elemento, conduce a la expresión

$$\iint_{A^{(e)}} \delta \epsilon^T \sigma \, dA = \iint_{A^{(e)}} \delta u^T b \, t \, dA + \oint_{l^{(e)}} \delta u^T t \, ds + \sum_{i=1}^3 \delta u_i U_i + \sum_{i=1}^3 \delta v_i V_i \tag{5.2.25}$$

donde δu_i y δv_i son los desplazamientos virtuales de los nodos del elemento y U_i y V_i las fuerzas nodales que corresponden a dichos desplazamientos. El trabajo virtual de dichas fuerzas puede despejarse de la ecuación anterior

$$\iint_{A^{(e)}} \delta \varepsilon^T \sigma dA - \iint_{A^{(e)}} \delta u^T b t dA - \oint_{l^{(e)}} \delta u^T t t ds = [\delta a^{(e)}]^T q^{(e)} \quad (5.2.26)$$

donde para el elemento triangular de tres nodos

$$\begin{aligned} \delta a^{(e)} &= [\delta u_1, \delta v_1, \delta u_2, \delta v_2, \delta u_3, \delta v_3]^T \\ q^{(e)} &= [U_1, V_1, U_2, V_2, U_3, V_3]^T \end{aligned} \quad (5.2.27)$$

De ecuaciones (5.2.7) y (5.2.18) se puede escribir

$$\delta u^T = [\delta a^{(e)}]^T N^T \quad ; \quad \delta \varepsilon^T = [\delta a^{(e)}]^T B^T \quad (5.2.28)$$

Sustituyendo ecuación (5.2.28) en ecuación (5.2.26) y sacando factor común $\delta a^{(e)}$ en el primer miembro se obtiene

$$[\delta a^{(e)}]^T \left[\iint_{A^{(e)}} B^T \sigma dA - \iint_{A^{(e)}} N^T b t dA - \oint_{l^{(e)}} N^T t t ds \right] = [\delta a^{(e)}]^T q^{(e)} \quad (5.2.29)$$

Teniendo en cuenta la arbitrariedad de los desplazamientos virtuales, resulta

$$\iint_{A^{(e)}} B^T \sigma dA - \iint_{A^{(e)}} N^T b t dA - \oint_{l^{(e)}} N^T t t ds = q^{(e)} \quad (5.2.30)$$

La ecuación (5.2.30) expresa el equilibrio entre las fuerzas nodales, las fuerzas internas debidas a la deformación del elemento (primera integral) y las fuerzas de cuerpo (segunda integral). Sustituyendo ahora el vector de tensiones σ por su expresión en términos de los desplazamientos nodales, utilizando la forma más general de la ecuación (5.2.24), se obtiene

$$\iint_{A^{(e)}} B^T (DBa^{(e)} - D\varepsilon^0 + \sigma^0) t dA - \iint_{A^{(e)}} N^T b t dA - \oint_{I^{(e)}} N^T t t ds = q^{(e)} \quad (5.2.31)$$

operando algebraicamente

$$\left[\iint_{A^{(e)}} B^T DB t dA \right] a^{(e)} - \iint_{A^{(e)}} B^T D\varepsilon^0 t dA + \iint_{A^{(e)}} B^T \sigma^0 t dA - \iint_{A^{(e)}} N^T b t dA - \oint_{I^{(e)}} N^T t t ds = q^{(e)} \quad (5.2.32)$$

ó

$$K^{(e)} a^{(e)} - f^{(e)} = q^{(e)} \quad (5.2.33)$$

donde

$$K^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} B^T DB t dA \quad (5.2.34)$$

es la matriz de rigidez del elemento, y

$$f^{(e)} = f_{\varepsilon}^{(e)} + f_{\sigma}^{(e)} + f_b^{(e)} + f_t^{(e)} \quad (5.2.35)$$

es el vector de fuerzas nodales equivalentes del elemento, siendo

$$f_{\varepsilon}^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} B^T D\varepsilon^0 t dA \quad (5.2.36)$$

$$f_{\sigma}^{(e)} = - \iint_{A^{(e)}} B^T \sigma^0 t dA \quad (5.2.37)$$

$$f_b^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} N^T b t dA \quad (5.2.38)$$

$$f_t^{(e)} = \oint_{I^{(e)}} N^T t t ds \quad (5.2.39)$$

los vectores de fuerzas nodales equivalentes debidos a deformaciones iniciales, tensiones iniciales, fuerzas repartidas por unidad de área y fuerzas

repartidas en el contorno, respectivamente. Las expresiones de la matriz de rigidez y de los vectores de fuerzas nodales equivalentes obtenidas son totalmente generales y, por consiguiente, aplicables a cualquier tipo de elemento bidimensional.

La ecuación de equilibrio global de la malla se obtiene como en estructuras de barras, estableciendo la compatibilidad geométrica y el equilibrio en los nodos. Es decir, imponiendo que la suma de las fuerzas nodales de todos los elementos que concurren al nodo particular considerado sea igual a la fuerza nodal exterior aplicada.

$$\sum_e q_i^{(e)} = p_j \quad (5.2.40)$$

donde $q_i^{(e)}$ representa los vectores de fuerzas nodales de los distintos elementos que comparten el nodo de número global j , y p_j el vector de fuerzas puntuales exteriores actuando en dicho nodo. Las ecuaciones de equilibrio del sistema se pueden obtener a partir de las contribuciones de las matrices de rigidez y los vectores de fuerzas nodales equivalentes de los diferentes elementos, siguiendo las reglas de ensamblaje basadas en la compatibilidad geométrica entre elementos. Luego del ensamblaje, la ecuación matricial global se puede escribir como

$$Ka = F \quad (5.2.41)$$

siendo K , a y F la matriz de rigidez, el vector de desplazamientos nodales y el vector de fuerzas nodales equivalentes de toda la malla respectivamente.

5.2.2.6 FORMULACION BASICA DEL ELEMENTO RECTANGULAR PLANO DE CUATRO NODOS

Se formulará a continuación el elemento rectangular de cuatro nodos para problemas de elasticidad bidimensional.

Supongamos un elemento aislado con el sistema de coordenadas locales r , s que se indica en Figura 5.2.4. Por tener cuatro desplazamientos nodales en

cada dirección hay que definir el campo de cada desplazamiento en el interior del elemento por un polinomio de cuatro coeficientes en r y s .

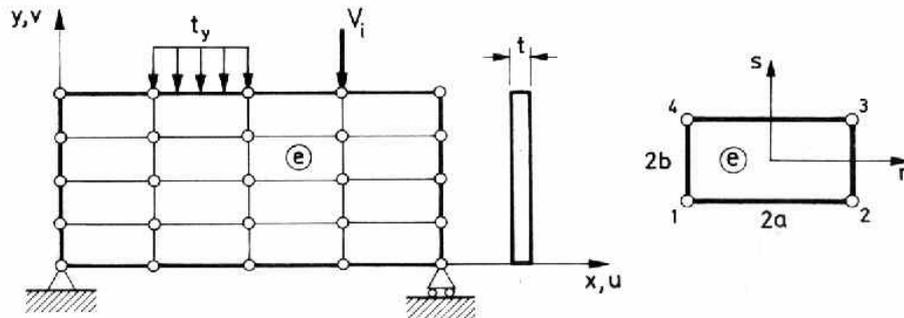


Figura 5.2.4: Discretización de una viga pared con elementos rectangulares de cuatro nodos. Definición de ejes locales r y s

La interpolación más simple es la siguiente

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 s + \alpha_4 rs \\ v(x, y) &= \alpha_5 + \alpha_6 r + \alpha_7 s + \alpha_8 rs \end{aligned} \quad (5.2.42)$$

De las ecuaciones anteriores se desprende que la distribución de u y v a lo largo de cada lado es lineal y depende sólo de los valores de los desplazamientos en los dos nodos que conectan cada lado con el elemento contiguo. Por lo tanto, la interpolación escogida garantiza la compatibilidad del campo de desplazamientos. Las cuatro constantes para cada desplazamiento se determinan utilizando las ocho condiciones siguientes en el sistema de coordenadas r, s .

$$\begin{aligned} u &= u_1 \text{ y } v = v_1 && \text{para } r = -a, \quad s = -b \\ u &= u_2 \text{ y } v = v_2 && \text{para } r = -a, \quad s = b \\ u &= u_3 \text{ y } v = v_3 && \text{para } r = a, \quad s = b \\ u &= u_4 \text{ y } v = v_4 && \text{para } r = a, \quad s = -b \end{aligned} \quad (5.2.43)$$

Sustituyendo dichas condiciones en ecuación (5.2.42) y resolviendo el sistema de ecuaciones para calcular las α_i para cada desplazamiento, se puede reescribir la ecuación 5.2.42 como (puesto que se utiliza la misma interpolación para u y v , basta con obtener las funciones de forma para uno de los dos desplazamientos)

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i \quad ; \quad v = \sum_{i=1}^4 N_i v_i \quad (5.2.44)$$

siendo las funciones de forma N_i

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{r}{a}\right) \left(1 - \frac{s}{b}\right) ; \quad N_2 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{r}{a}\right) \left(1 - \frac{s}{b}\right) \\ N_3 &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{r}{a}\right) \left(1 + \frac{s}{b}\right) ; \quad N_4 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{r}{a}\right) \left(1 + \frac{s}{b}\right) \end{aligned} \quad (5.2.45)$$

Las ecuaciones (5.2.45) pueden escribirse como

$$u = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = N a^{(e)} \quad (5.2.46)$$

siendo

$$N = [N_1, N_2, N_3, N_4] \quad ; \quad N_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix}$$

$$a^{(e)} = \begin{Bmatrix} a_1^{(e)} \\ a_2^{(e)} \\ a_3^{(e)} \\ a_4^{(e)} \end{Bmatrix} \quad ; \quad a_i^{(e)} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (5.2.47)$$

la matriz de funciones de forma y el vector de desplazamientos del elemento y del nodo i , respectivamente.

La matriz de deformación del elemento se obtiene

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^4 B_i a_i^{(e)} = [B_1, B_2, B_3, B_4] \begin{Bmatrix} a_1^{(e)} \\ a_2^{(e)} \\ a_3^{(e)} \\ a_4^{(e)} \end{Bmatrix} = B a^{(e)} \quad (5.2.48)$$

donde la submatriz B_i viene dada por la ecuación (5.2.22) correspondiente al elemento triangular de tres nodos. Se debe observar que en este caso el campo de deformaciones no es constante a pesar que se trata de un campo de desplazamientos asumido como lineal. Para el cálculo de las submatrices B_i es conveniente advertir que

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial r} \quad y \quad \frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial s} \quad (5.2.49)$$

La matriz de rigidez y los vectores de fuerzas nodales equivalentes se obtienen a partir del PTV tal lo explicado para elemento triangular. La matriz de rigidez del elemento rectangular de 4 nodos es:

$$K^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} B^T D B t dr ds = \iint_{A^{(e)}} \begin{bmatrix} B_1^T D B_1 & B_1^T D B_2 & B_1^T D B_3 & B_1^T D B_4 \\ \cdot & B_2^T D B_2 & B_2^T D B_3 & B_2^T D B_4 \\ & \cdot & B_3^T D B_3 & B_3^T D B_4 \\ \text{Sim.} & & & B_4^T D B_4 \end{bmatrix} t dr ds \quad (5.2.50)$$

Los vectores de fuerzas nodales equivalentes se obtienen por las ecuaciones (5.2.36) a (5.2.39), haciendo uso de las expresiones correspondientes para N_i y B_i . La contribución al nodo i de las fuerzas uniformemente repartidas sobre el elemento es

$$f_{b_i}^{(e)} = \frac{(tA)^{(e)}}{4} \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} \quad (5.2.51)$$

ello significa que, la fuerza total se reparte equitativamente entre los cuatro nodos. Asimismo, puede encontrarse fácilmente que una fuerza uniformemente repartida sobre un lado perteneciente al contorno se reparte por partes iguales entre los dos nodos de dicho lado. Partiendo de la formulación indicada del elemento rectangular de 4 nodos pueden obtenerse otros elementos mejorados tales como el elemento isoparamétrico y elementos de mayor orden.

5.3 METODOS DE SOLUCION NUMERICA EN ANALISIS NO LINEAL

En esta sección se presentan los pasos necesarios para la implementación y solución computacional en el caso de materiales con comportamiento inelástico, de acuerdo a NAFEMS, (1992); Crisfield, (1991); Spyrakos, (1994) Spyrakos, (1997)

En este caso la solución numérica requiere de una discretización espacial (con elementos finitos) y de un análisis incremental para reproducir precisamente la respuesta no lineal física. Para establecer el equilibrio entre las fuerzas internas y las fuerzas externas, en cada incremento, se utilizan procedimientos iterativos con lo cual se puede indicar que se está ante un proceso de solución *incremental-iterativo*.

El proceso de solución se indica esquemáticamente en la Figura 5.3.1. En dicho proceso, para cada incremento de fuerzas o de desplazamientos, se parte de valores de u , K , ε , σ , y E conocidos.

5.3.1 PROCEDIMIENTO ITERATIVO

El desplazamiento total u_i es actualizado iterativamente mediante incrementos δu_i hasta que la condición de equilibrio es alcanzada dentro de una tolerancia preestablecida. Existen distintos procedimientos iterativos siendo la diferencia entre ellos el camino utilizado para determinar δu_i . El incremento iterativo es calculado usando la matriz de rigidez K que permite representar la linearización de la relación entre el vector fuerza y el vector desplazamiento. Dicha matriz de rigidez es cambiada en cada iteración. Los métodos que se pueden utilizar son Newton-Raphson, Quasi-Newton, Constan Stiffness Method, entre otros, incluyendo combinaciones de los métodos mencionados

5.3.2 PROCEDIMIENTO INCREMENTAL

El proceso incremental puede realizarse de distintas maneras

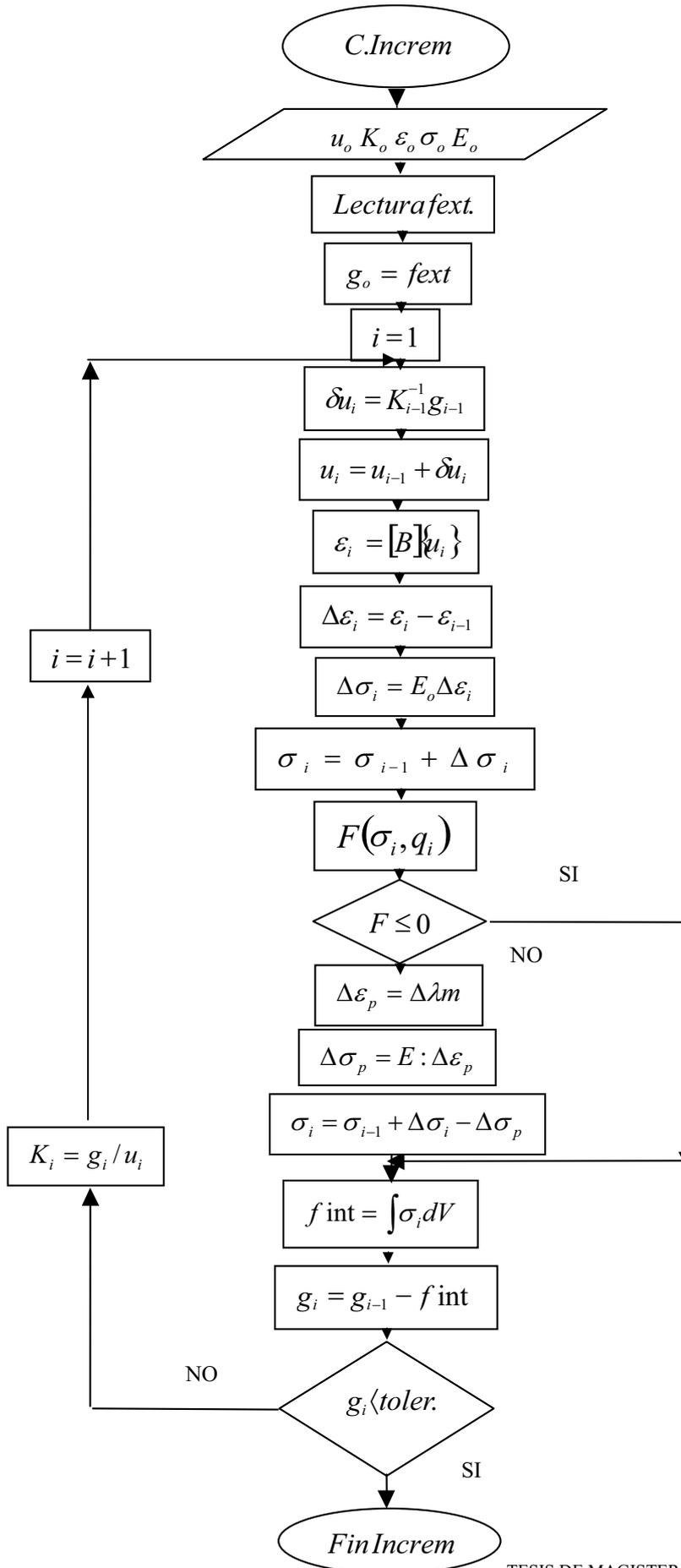
- Control de Carga
- Control de Desplazamientos
- Método Arc-Length o de Control Mixto

En los dos primeros casos el proceso será con control de carga o de desplazamientos, según el incremento se aplique directamente a las cargas o a los desplazamientos, respectivamente.

El Método Arc-Lengh o de Control Mixto, fue especialmente diseñado por Crisfield (1991) para acelerar el proceso iterativo a efectos de obtener la convergencia en respuestas mecánicas materiales o estructurales de fuertes no linealidades. Particularmente su uso es conveniente en el caso de comportamientos tipo “snap back” en los cuales se registran descensos de carga y desplazamiento combinado en el sector de postpico. Este método aumenta la velocidad de convergencia mediante la modificación del tamaño del paso (longitud de arco) de acuerdo a los resultados que se van obteniendo.

En el presente trabajo se utiliza el proceso incremental a través de control de desplazamientos.

Figura 5.3.1: Esquema del proceso de solución iterativo-incremental



CAPITULO 6
ANALISIS NUMERICO

CAPITULO 6

ANALISIS NUMERICO

Es difícil establecer el modelo más adecuado para el estudio del comportamiento de pernos anclados en hormigón. La adopción de dicho modelo o teoría constitutiva ha sido y es motivo de muchas investigaciones analíticas y experimentales. Esto se debe a que el complejo estado de tensiones y la tortuosa respuesta de falla del sistema o condiciones de borde que caracteriza al *pull-out test* requiere de formulaciones materiales capaces de brindar predicciones realistas para estados tensionales que cubran todo el espectro de situaciones posibles, incluyendo estados tridimensionales de tracción y compresión combinadas. Por lo tanto, resulta dificultoso definir una única formulación constitutiva que brinde soluciones precisas y de igual confiabilidad para los estados tensionales fuertemente heterogéneos que genera el *pull-out test*. Esta limitación se ha visto reflejada en las conclusiones de publicaciones recientes de RILEM y otras entidades científicas, que indican falta de consenso en cuanto a la teoría material más eficiente para el estudio de este tipo de ensayos. Esto se demuestra en los análisis comparativos, de estudios numéricos llevados a cabo hasta el presente, en el Capítulo 2 de esta tesis.

En el presente trabajo se discutirán, a través del análisis numérico del problema en estudio en el marco del MEF con el uso del software ALGOR, los siguientes modelos materiales:

- ✓ Modelos con *idealización material lineal elástica*: en estado plano de tensiones, en estado plano de deformaciones y en estado axialsimétrico.
- ✓ Modelos con *idealización material elastoplástica* de tipo Von Mises y Drucker Prager.

En primer lugar el análisis lineal elástico es utilizado a fin de identificar las áreas donde se desarrollarán las mayores deformaciones, que en los sucesivos análisis elastoplásticos darán lugar a zonas de localización de falla ó fisuras. Esto a su vez permite la optimización del mallado de los modelos de elementos finitos en análisis. El análisis elástico, permite también la adopción de parámetros adecuados para que el proceso de solución sea más eficiente. Tales parámetros incluyen: técnicas de solución numérica, tamaño de incrementos de carga, tolerancia de la solución para la convergencia, número máximo de iteraciones para búsqueda de equilibrio en cada paso de carga. Finalmente, y con el estudio elástico del *pull-out test* se pretende analizar la capacidad de la teoría elástica para evidenciar las propiedades más relevantes del comportamiento de este ensayo y la influencia de la geometría en dicho comportamiento.

En segundo lugar, el análisis no lineal elastoplástico posibilita una representación más realista del problema en estudio. Si bien es cierto que existen muchas alternativas para la adopción de la ley constitutiva representativa del hormigón, está demostrado que en los casos particulares en que existe un estado multiaxial de tensiones, este material se aparta marcadamente del comportamiento frágil que presenta en el caso uniaxial. Dada esta situación, el hormigón se torna mucho más dúctil, alcanzando en el punto de máxima resistencia, deformaciones 10, 20 ó 30 veces superiores a las correspondientes al estado uniaxial y tornándose su comportamiento francamente plástico de acuerdo a Sfer *et al.* (1998).

En todos los casos analizados la atención se focaliza en el estado de tensiones reinantes durante el comportamiento de deformación, por lo tanto se obtendrán las curvas de iguales tensiones y deformaciones máximas y mínimas principales y desplazamiento máximo en la cabeza del anclaje (Punto A de Figura 6.1.1, correspondiente al extremo superior de la cabeza del perno)

En los casos particulares de modelización material elastoplástica se analizará la capacidad de las teorías elastoplásticas para predecir el mecanismo de falla del sistema en estudio y la influencia de la geometría del sistema y de la resistencia del hormigón sobre dicho mecanismo de falla. Para ello, se

obtendrá la curva carga-desplazamiento, la cual informará la carga última y el tipo de comportamiento para cada caso. Dicha carga última se correlacionará con la resistencia del hormigón.

Los resultados obtenidos serán comparados con los reportados en la bibliografía.

6.1 ANALISIS ELASTICO DEL PULL-OUT TEST

En Figura 6.1.1 se muestra la geometría, coincidente con la propuesta por RILEM TC 90-FMA, (1991), y malla de elementos finitos correspondiente al Modelo 1 analizado elásticamente (192 elementos y 226 puntos nodales). Se utilizó el elemento sólido elástico 2D, de 4 y de 8 nodos con dos grados de libertad traslacionales por nodo, formulado en el plano YZ.

En Figuras 6.1.2 a y b se observa además la variación considerada en la geometría del perno y en la distancia de éste a la placa de apoyo, respecto de dicha geometría en la Figura 6.1.1. Estas modificaciones tienen por objeto estudiar la influencia de los parámetros geométricos, tanto en la distribución de tensiones y de deformaciones como en el comportamiento global de falla.

La carga se aplicó directamente desde el perno al hormigón, lo cual se ha materializado aplicando la carga en los nodos situados sobre la cabeza del mismo.

A fin de *analizar la influencia de la geometría* sobre la distribución de tensiones y de deformaciones en los distintos modelos analizados se realizó el análisis bajo carga constante de 120 kN, correspondiente con la carga última según la ecuación empírica propuesta por Bode & Roik según Walther *et al.* (1991).

Propiedades mecánicas del Hormigón: Se utilizaron las mismas propiedades que las propuestas por RILEM TC-90 FMA, (1991), es decir

$$E_o = 30 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0.2$$

$$f'_c = 30 \text{ MPa}$$

$$f'_t = 3 \text{ MPa}$$

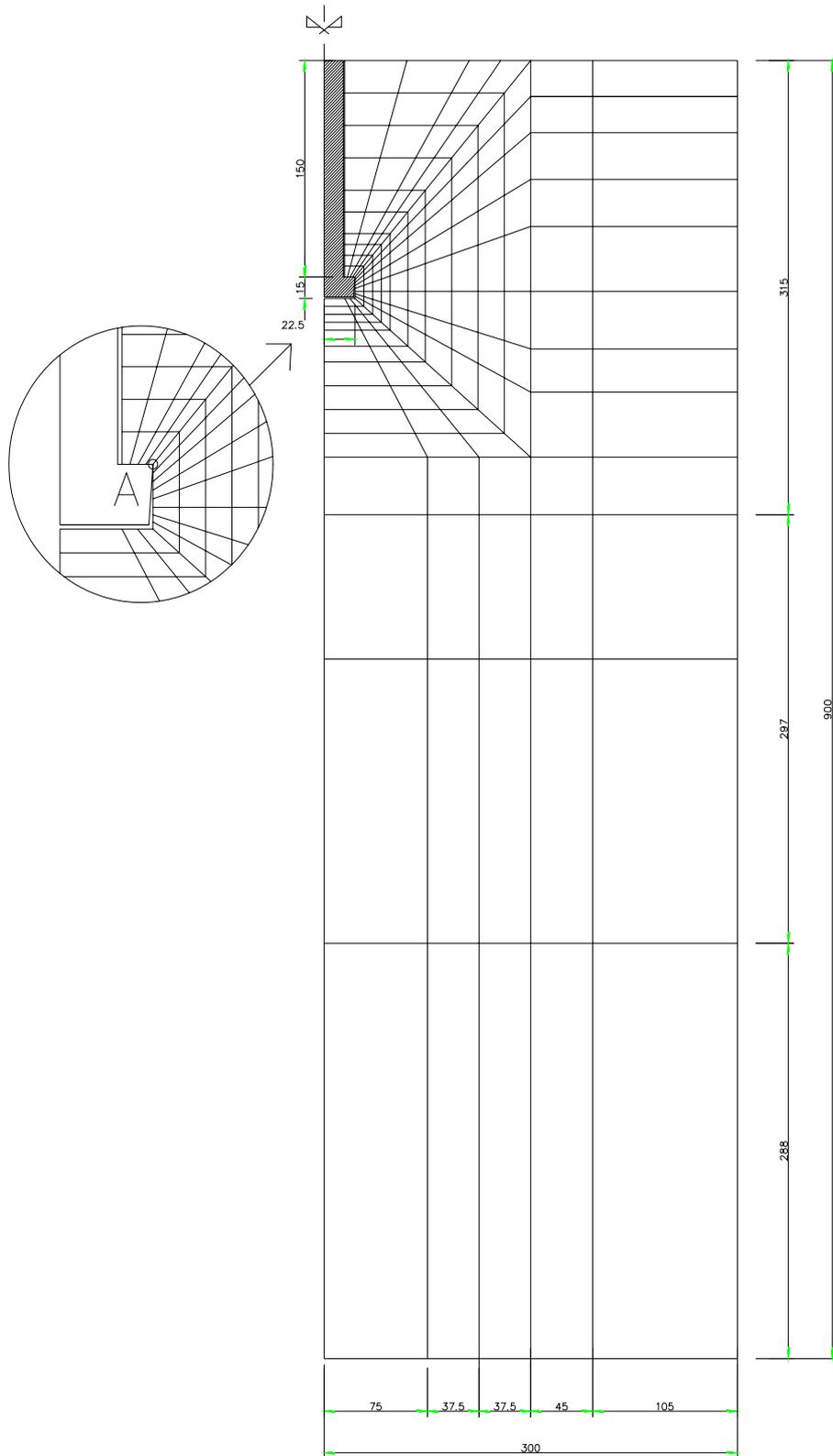
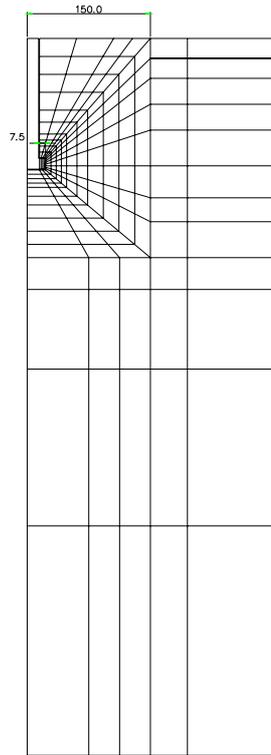
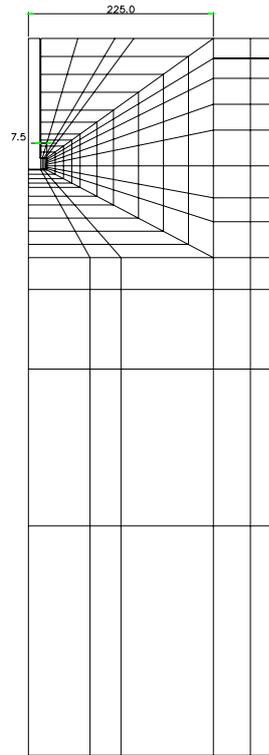


Figura 6.1.1: Geometría y Malla de Elementos Finitos correspondiente a Modelo 1



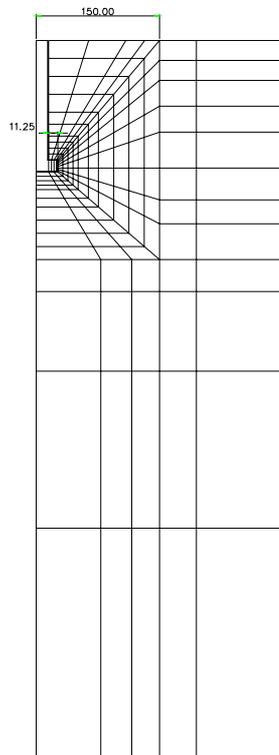
MODELO 1

e= 150 mm
a= 7.5 mm



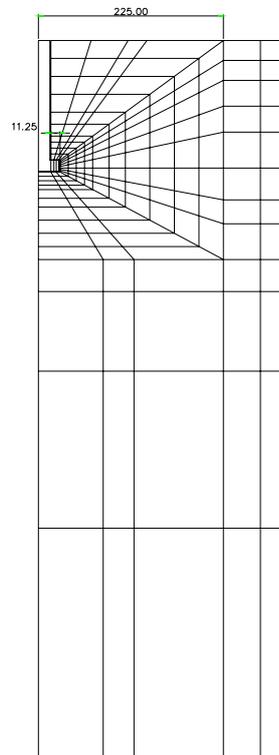
MODELO 2

e= 225 mm
a= 7.5 mm



MODELO 3

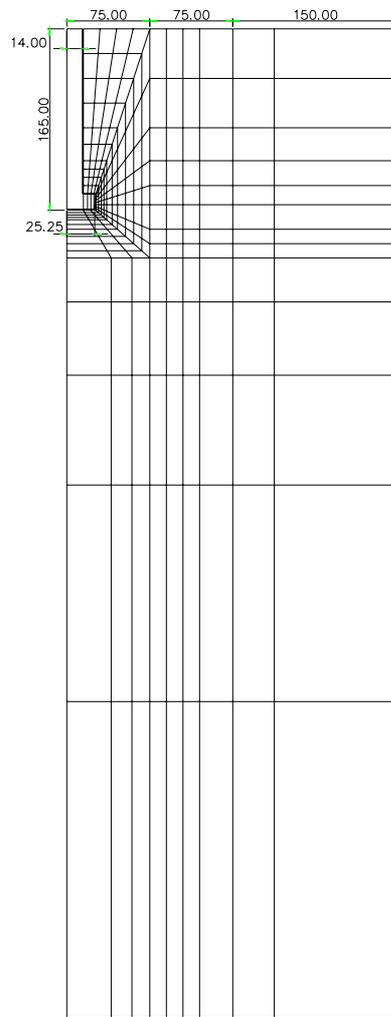
e= 150 mm
a= 11.25 mm



MODELO 4

e= 225 mm
a= 11.25 mm

Figura 6.1.2.a: Geometría correspondiente a Modelos 1, 2, 3 y 4



MODELO 5

$e = 75 \text{ mm}$
 $a = 11.25 \text{ mm}$

Figura 6.1.2 b: Geometría correspondiente a Modelo 5

6.1.1 RESULTADOS OBTENIDOS:

En las Tablas VI.1.1, VI.1.2 y VI.1.3 se vuelcan los valores extremos de tensiones, deformaciones y desplazamientos del punto A indicado en Figura 6.1.1, correspondientes a los modelos en estudio y para la carga de 120 KN.

En las Figuras 6.1.3, 6.1.4 y 6.1.5 se observan las curvas de iguales tensiones máximas y mínimas principales y las curvas de iguales deformaciones máximas para el Modelo 1 correspondiente a los problemas en estado axialsimétrico, estado plano de tensiones y plano de deformaciones respectivamente para la misma carga.

En Figura 6.1.6, a modo de ejemplo, se puede observar la deformada correspondiente a uno de los modelos analizados.

Tabla VI.1.1: Problemas Axialsimétricos

Modelo	e/a [mm]	Tensiones Máx. Ppales.[kN/mm ²]	Tensiones Mín. Ppales.[kN/mm ²]	Desplazamiento Máximo[mm]	Deformación Máxima
Modelo 1	150/7.5	0.0300	-0.0600	0.0170	0.000900
Modelo 2	225/7.5	0.0046	-0.0053	0.0040	0.000120
Modelo 3	150/11.25	0.0015	-0.0017	0.0014	0.000047
Modelo 4	225/11.25	0.0013	-0.0011	0.0022	0.000038
Modelo 5	75/11.25	0.0380	-0.0450	0.0200	0.001200

Se debe notar que al reducir el diámetro de la cabeza del perno (Modelo 1 respecto de Modelo 3 y Modelo 2 respecto de Modelo 4) se incrementan sustancialmente las tensiones máximas y mínimas y, por consiguiente, las deformaciones indicando comportamiento más dúctil.

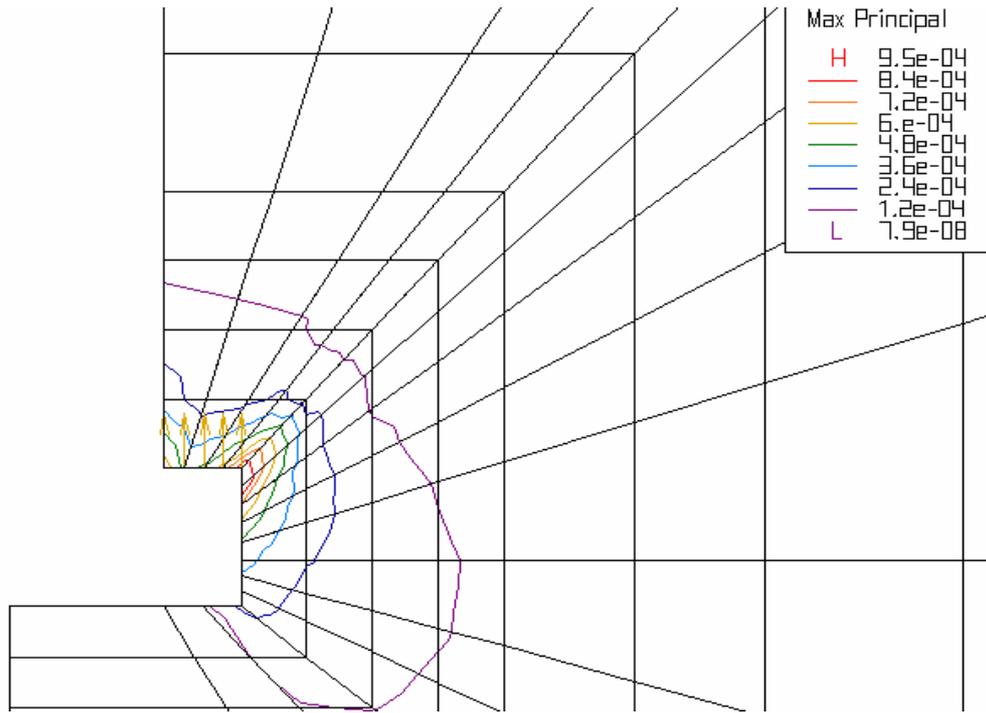


Figura 6.1.3 a: Curvas de iguales deformaciones máximas principales

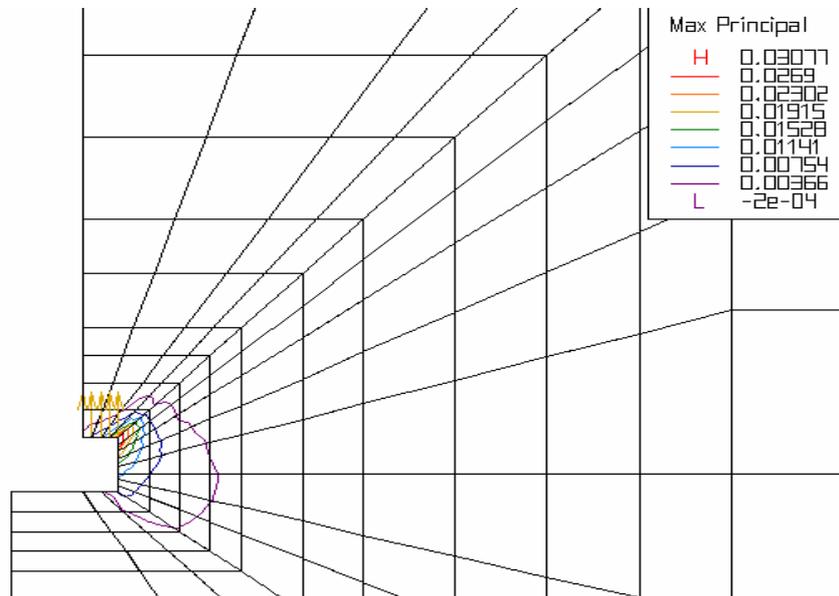


Figura 6.1.3 b: Curvas de iguales tensiones máximas principales

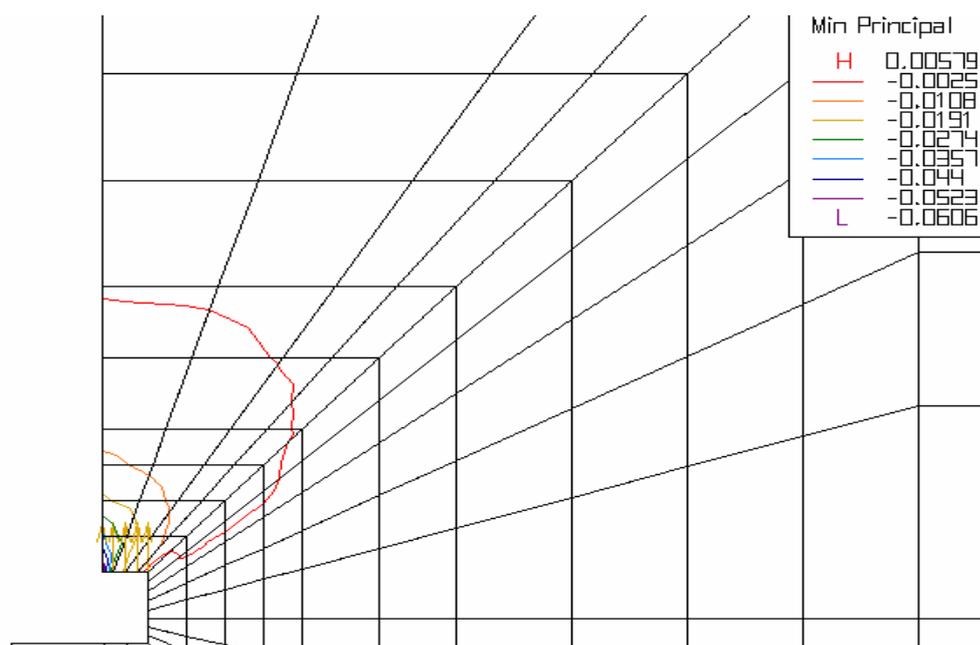


Figura 6.1.3 c: Curvas de iguales tensiones mínimas principales

Tabla VI.1.2: Problemas en Tensiones Planas

Modelo	e/a [mm]	Tensiones Máx. Ppales.[kN/mm ²]	Tensiones Mín. Ppales.[kN/mm ²]	Desplazamiento Máximo[mm]	Deformación Máxima
Modelo 1	150/7.5	0.0170	-0.0300	0.0116	0.00053
Modelo 2	225/7.5	0.0160	-0.0210	0.0150	0.00055
Modelo 3	150/11.25	0.0154	-0.0190	0.0087	0.00056
Modelo 4	225/11.25	0.0146	-0.0127	0.0200	0.00050
Modelo 5	75/11.25	0.0392	-0.0376	0.0082	0.00128

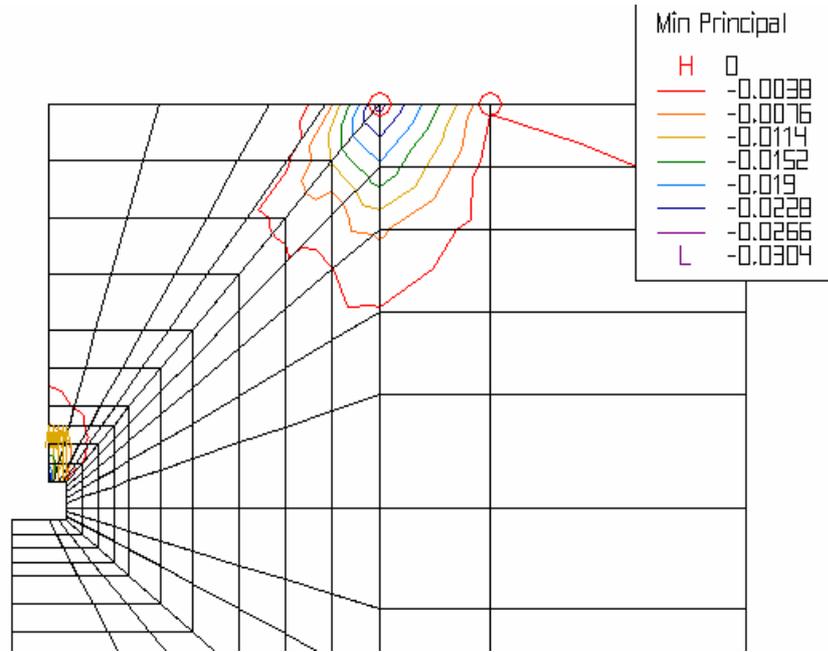


Figura 6.1.4 a: Curvas de iguales tensiones mínimas principales

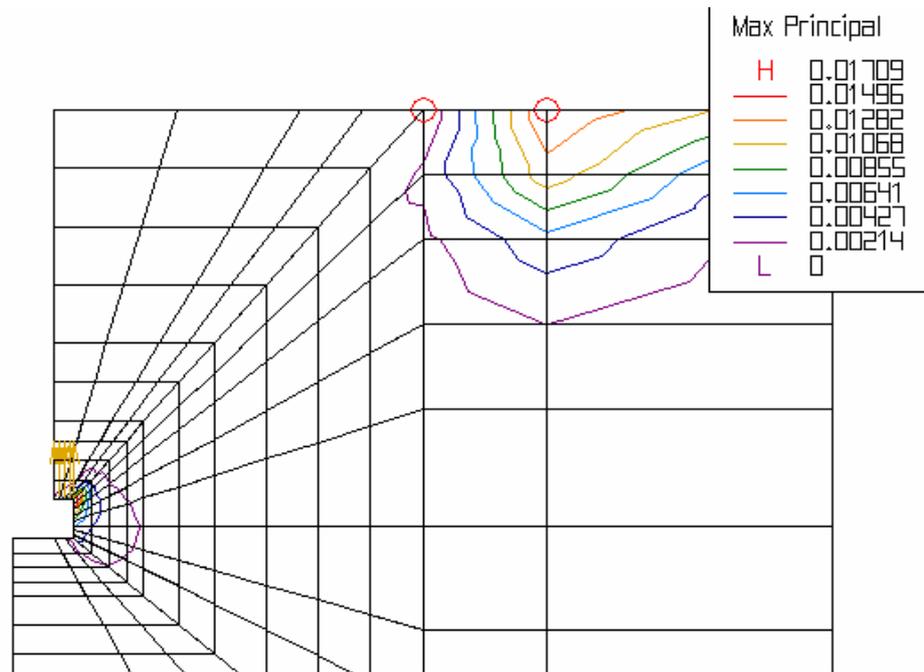


Figura 6.1.4 b: Curvas de iguales tensiones máximas principales

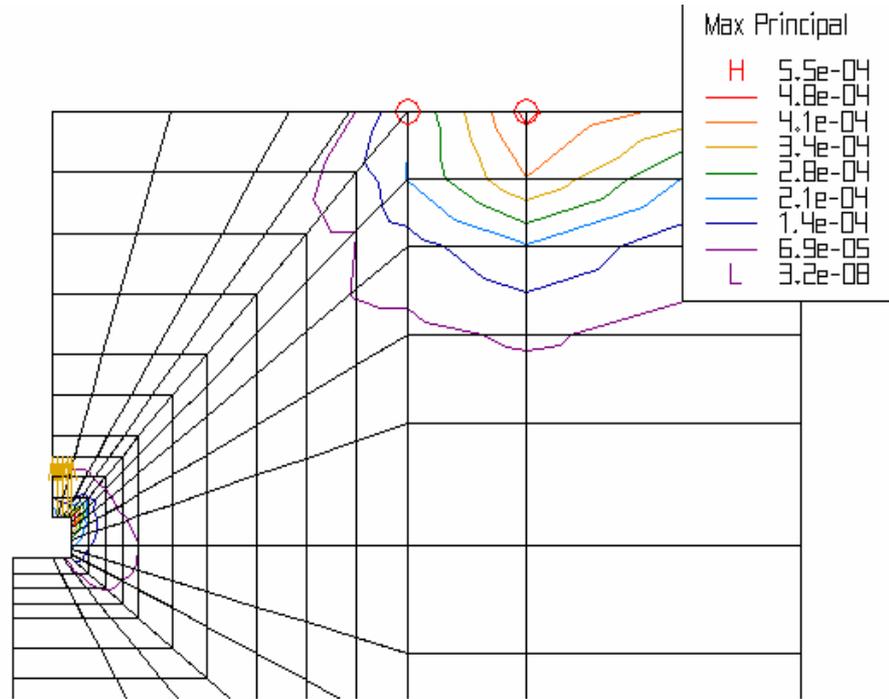


Figura 6.1.4 c: Curvas de iguales deformaciones máximas principales.

Tabla VI.1.3: Problemas en Deformaciones Planas

Modelo	e/a [mm]	Tensiones Máx. Ppales.[kN/mm ²]	Tensiones Mín. Ppales.[kN/mm ²]	Desplazamiento Máximo[mm]	Deformación Máxima
Modelo 1	150/7.5	0.0170	-0.0300	0.0110	0.00053
Modelo 2	225/7.5	0.0160	-0.0210	0.0143	0.00051
Modelo 3	150/11.25	0.0174	-0.0190	0.0090	0.00055
Modelo 4	225/11.25	0.0157	-0.0130	0.0200	0.00044
Modelo 5	75/11.25	0.0400	-0.0384	0.0080	0.00128

Comparando los resultados en las tablas VI.1.1, VI.1.2 y VI.1.3 se puede observar que las tensiones de compresión presentan marcada diferencia en los ensayos axialsimétricos y una diferencia menor en los ensayos de tensiones y deformaciones planas. Sin embargo se observa que en el caso de tensión plana la influencia del diámetro de la cabeza del perno en la tensión máxima principal es mayor que en el caso de deformación plana, si bien siempre menor que en el caso axialsimétrico. Contrariamente, resultan ser, en general, los

ensayos de tensión y deformación plana más deformables que el axialsimétrico. Esto demuestra la notable influencia de la simetría circunferencial del material lo que permite el desarrollo de un cono de falla completo.

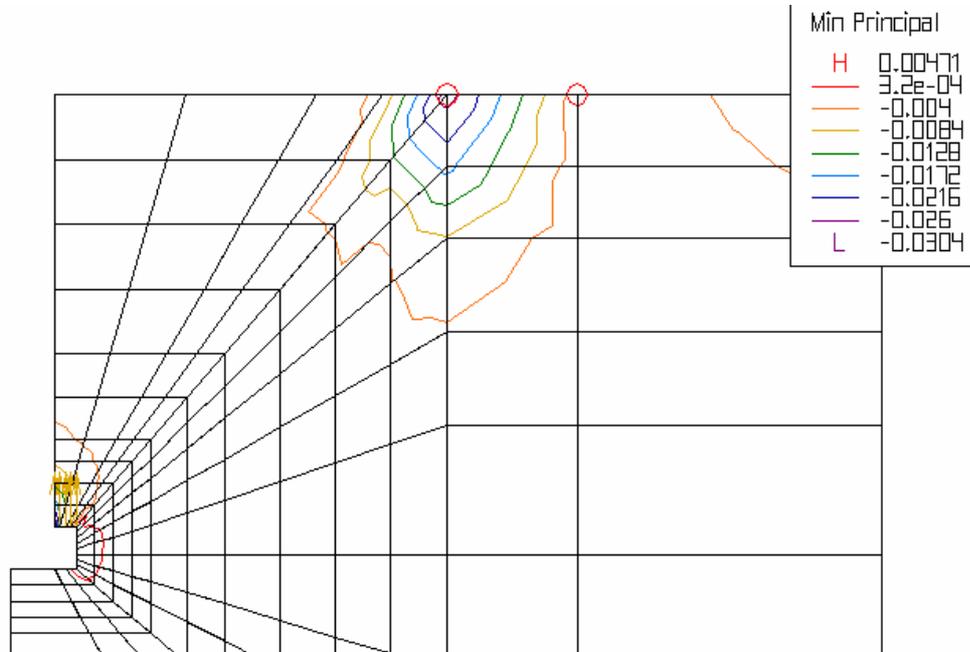


Figura 6.1.5 a: Curvas de iguales tensiones mínimas principales

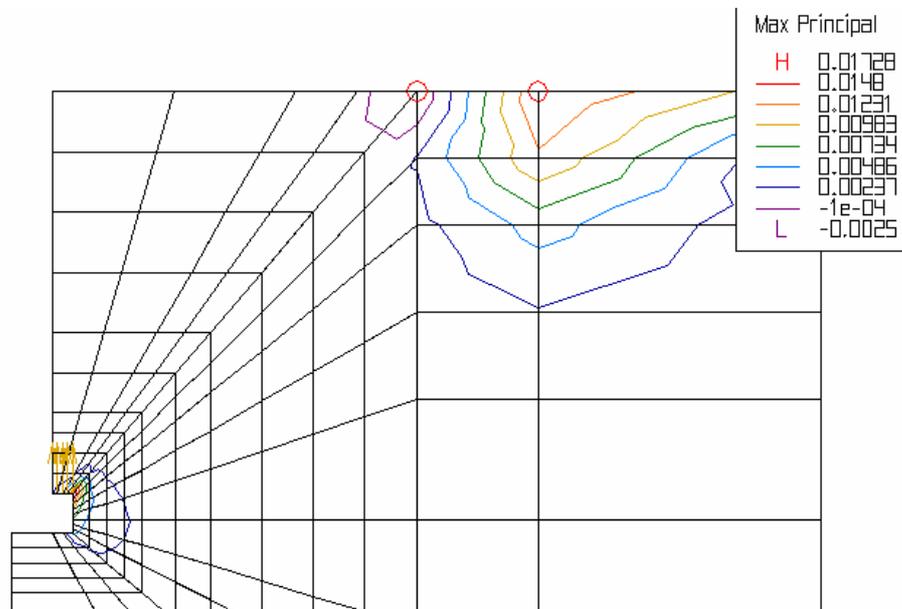


Figura 6.1.5 b: Curvas de iguales tensiones máximas principales

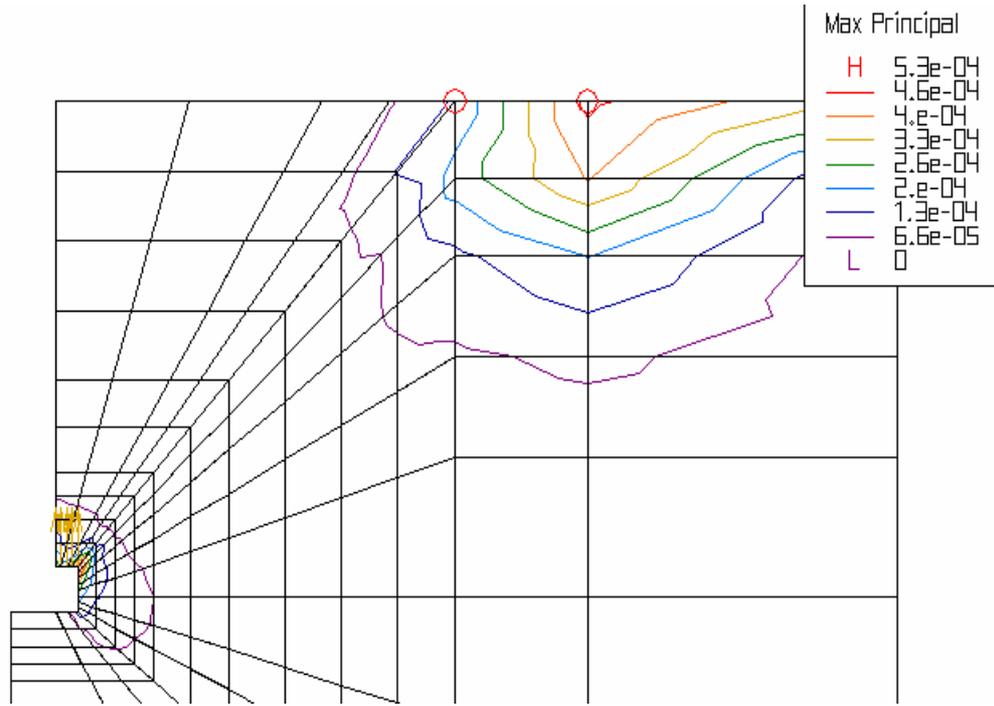


Figura 6.1.5 c: Curvas de iguales deformaciones máximas principales

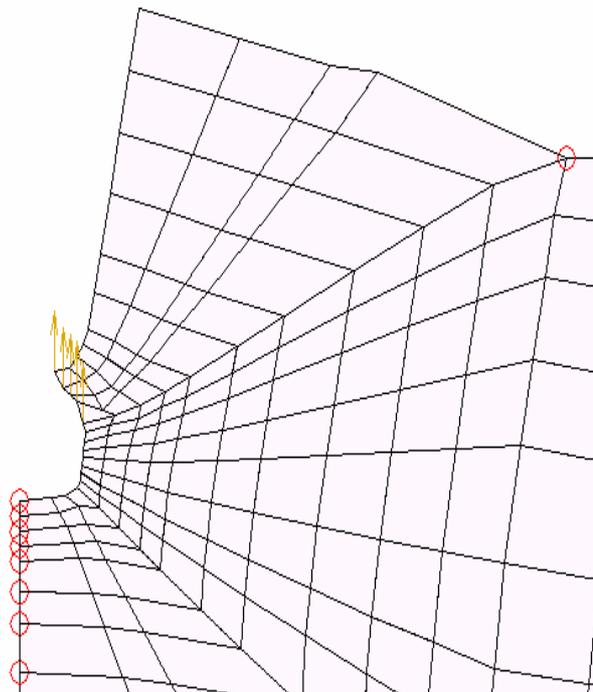


Figura 6.1.6: Deformada correspondiente a Modelo 1

6.1.2 ANALISIS Y COMPARACION DE RESULTADOS

Distribución de Tensiones y Deformaciones

- ✓ Los estudios con modelos elásticos lineales permiten visualizar claramente la fuerte heterogeneidad y complejidad de la distribución de tensiones en el hormigón del *pull-out test*, pasando de zonas de fuerte compresión de confinamiento a otras de tracción dominante. Esto puede observarse en las Figuras 6.1.3, 6.1.4 y 6.1.5.
- ✓ Los análisis elásticos permiten extraer conclusiones sobre las diferencias más importantes del comportamiento del *pull-out test* en estados axialsimétricos; de deformación plana y de tensión plana según se observó en estos estudios.
- ✓ El análisis de las máximas tensiones principales σ_1 permite observar que las tensiones de tracción tienen su valor máximo en el borde superior de la cabeza del perno lo cual indica que las fisuras en el hormigón se iniciarán allí. Las mismas tendrán una inclinación ortogonal a las líneas de igual tensión principal de tracción lo que permite indicar que su trayectoria será desde la cabeza del perno hacia el apoyo, tal lo indicado por otros estudios analizados Walther *et al.* (1991). Puede observarse, asimismo, que dependiendo de las relaciones geométricas del modelo en análisis las tensiones principales máximas pueden llegar a ser de compresión, lo que es indicativo de que existe por encima de la cabeza del perno un estado de compresión de fundamental importancia en el comportamiento de deformación del sistema. Es decir, en la ductilidad de la respuesta, dado que el estado de compresión conlleva a una falla más dúctil que la de tracción dominante.
- ✓ La observación de las curvas de iguales tensiones principales mínimas σ_2 permite inferir que las tensiones más altas de compresión ocurren en la parte superior de la cabeza del perno, en su borde interno, en total concordancia con Elfgren *et al.* (1980) y otros estudios previamente relevados.
- ✓ En cuanto a las deformaciones, se observa que las máximas ocurren en la parte superior de la cabeza del perno de acuerdo con todos los estudios de

(RILEM TC-90 FMA), evidenciándose, en general, que las deformaciones de los modelos axialsimétricos son menores que las correspondientes a los modelos en estados planos de tensiones y deformaciones.

Influencia de la geometría

A fin de analizar la influencia de los parámetros geométricos se tuvo en cuenta en la presente investigación la variación de los mismos de acuerdo a lo señalado en Figura 6.1.2. Por un lado se incrementó el ancho del ala de la cabeza del perno en un 50%, esto se observa en Modelos 1 y 2 respecto de 3 y 4. Por otro lado se analizó la influencia de la variación de la relación entre los parámetros e y l_d , representativos de la distancia entre el eje de simetría y el apoyo por un lado, y de la profundidad embebida del perno por otro, resultando las siguientes relaciones de e/d : 1, 1.5 y 0.5 para los Modelos 1 y 3, 2 y 4, y 5, respectivamente.

- ✓ Los análisis elásticos permiten obtener conclusiones relevantes sobre la influencia de los parámetros geométricos en la ductilidad y distribución de tensiones del *pull-out test*.
- ✓ La influencia del tamaño de la cabeza del perno puede analizarse a través de la comparación de los resultados de los modelos 3 y 1 y de los modelos 4 y 2 en los cuales a igualdad de profundidad del perno (l_d) y del diámetro del anillo reactivo ($2e$) se consideró un incremento del 50 % en el ancho del ala de la cabeza del perno (a). En todos los casos analizados se observa que las tensiones y deformaciones aumentan con el decremento del ancho de la cabeza. Ello es más notable en los casos de los modelos axialsimétricos que en los modelos en estados planos de tensiones y deformaciones como lo demuestran los resultados de las Tablas VI.1.1, VI.1.2 y VI.1.3 a través de la comparación de los resultados de los modelos antes indicados.
- ✓ La influencia de la distancia del eje del perno al anillo reactivo (e) puede analizarse con los resultados de las Tablas VI.1.1, VI.1.2 y VI.1.3 comparando los resultados correspondientes a los Modelos 2 y 1 por un

lado y 4 con 3 y 5 por otro, en los que se ha establecido una variación de dicho parámetro de manera decreciente manteniendo la profundidad del perno (l_d).

La observación de los resultados obtenidos permite indicar que a igualdad de ancho de cabeza (a) y profundidad (l_d) las tensiones y deformaciones varían de acuerdo a lo siguiente:

$$\begin{aligned} \sigma \text{ y } \varepsilon \text{ Mod 2} &< \sigma \text{ y } \varepsilon \text{ Mod 1} \\ \sigma \text{ y } \varepsilon \text{ Mod 4} &< \sigma \text{ y } \varepsilon \text{ Mod 3} < \sigma \text{ y } \varepsilon \text{ Mod 5} \end{aligned}$$

Es decir, reduciendo la distancia del eje del perno a la reacción del sistema se incrementan las tensiones y las deformaciones.

La interpretación de la influencia de este parámetro en los valores de tensiones y deformaciones máximas puede realizarse más acabadamente mediante la comparación del problema del *pull-out* con el de flexión en vigas de esbelteces iguales a $2e/l_d$, según se analiza en el Apéndice y que en este caso corresponden a:

Modelos 1 y 3	esbeltez: $2e/l_d = 2$
Modelos 2 y 4	esbeltez: $2e/l_d = 3$
Modelo 5	esbeltez: $2e/l_d = 1$

Las menores tensiones y deformaciones en los Modelos 2 y 4 respecto de los modelos 1, 3 y 5 se justifican porque las relaciones geométricas de los primeros hacen que su comportamiento sea comparable al de vigas esbeltas. En el caso de los Modelos 1, 3 y más aún en el 5 el comportamiento es comparable al de las vigas de gran altura. Es por ello que luces ($2e$) menores conducen a mayores tensiones y deformaciones. Estos modelos presentan mayores tensiones y deformaciones en la cabeza del perno, observándose además que en los apoyos se originan fuertes concentraciones de tensiones.

- ✓ El análisis de los resultados obtenidos permite indicar que los modelos elásticos lineales analizados reproducen adecuadamente el comportamiento global del problema en estudio. Esto se desprende de la comparación de las Figuras representativas de la distribución de tensiones y de deformaciones

en el presente trabajo (ver Fig.6.1.6) con las disponibles en la bibliografía, RILEM TC-90FMA, (1991); Elfgren et al, (1980); Etse (1998).

- ✓ También indican que el sistema en estudio es altamente sensible a la variación de los parámetros geométricos cuya influencia se analiza.
- ✓ Por otro lado, y como es de esperar, los análisis elásticos impiden obtener conclusiones acerca del mecanismo de falla y capacidad del *pull-out test*.

Estas limitaciones de las predicciones de los ensayos elásticos serán analizadas con ensayos numéricos elastoplásticos en la siguiente sección.

6.2 ANALISIS ELASTOPLASTICO DEL PULL-OUT TEST

Se analiza numéricamente el *Ensayo de Extracción* en hormigón ó *pull-out test*, utilizando los modelos de Drucker-Prager y Von Mises considerando endurecimiento de deformación isotrópico, flujo asociado y plasticidad perfecta. En particular se estudiaron dos elementos de relevancia en *el Ensayo de Extracción*. Por un lado, la influencia de la variación de los parámetros geométricos del sistema analizando los modelos acordes con las geometrías indicadas en la sección 6.1 a través de las Figuras 6.1.1 y 6.1.2 a y b. Ello indica que la geometría del perno y la distancia del eje del mismo a la placa de apoyo se varió de acuerdo a lo realizado en el caso de los modelos elásticos, con la finalidad de estudiar su influencia en el mecanismo y forma de falla del sistema.

Por otro lado, se analiza la influencia de la resistencia del hormigón, f'_c , en el comportamiento de falla, realizándose un segundo análisis en el que se modifica la misma de 30 MPa a 23 MPa, mientras que los restantes parámetros materiales y la geometría del sistema fueron mantenidos inalterables respecto del primer ensayo.

El análisis, en todos los casos, se realiza con control de desplazamientos, aplicando la acción directamente al hormigón desde el perno lo cual se ha materializado de acuerdo a lo indicado en la Figura 6.2.1.

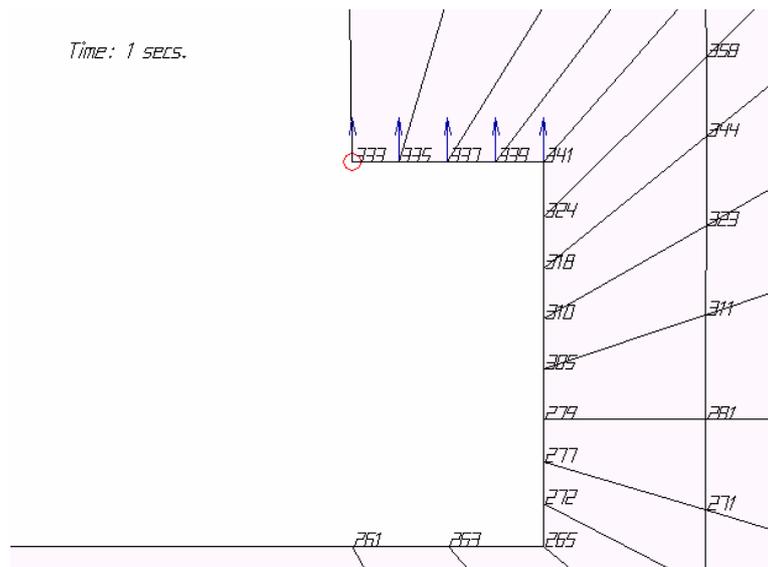


Figura 6.2.1: Materialización de la acción sobre el hormigón

Las características materiales consideradas, para el primer análisis, en cada uno de los casos fueron las siguientes

✓ MODELO DE VON MISES

La curva de respuesta se representa en Tabla VI.2.1 y Figura 6.2.2, mientras que los parámetros internos del modelo considerados fueron

$$E=30 \text{ GPa}$$

$$\nu=0.2$$

$$\sigma_C=30 \text{ MPa (tensión límite plástico ó tensión de comparación)}$$

$$\sigma_{le}= 10 \text{ MPa (tensión límite elástico)}$$

Tabla VI.2.1: Valores σ -E de la curva de respuesta σ - ε del modelo de Von Mises

Datos de los segmentos de la curva de respuesta σ - ε del modelo de Von Mises		
	Tensiones [MPa]	Modulo de Elasticidad [Gpa]
1	10	30
2	15	20
3	20	15
4	25	10
5	30	0

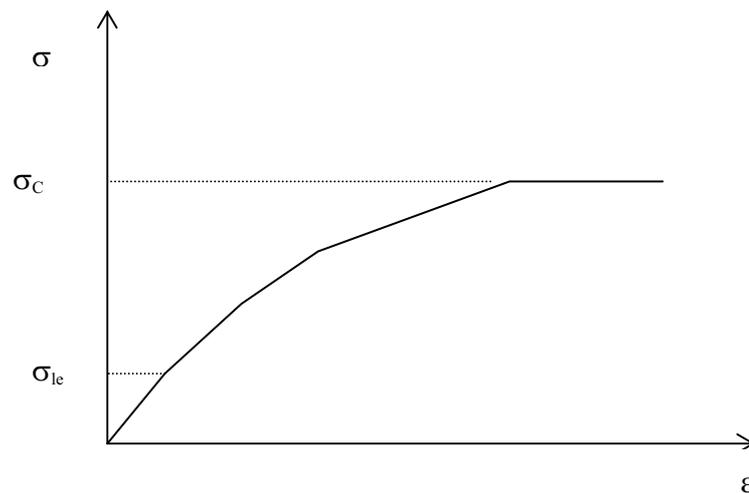


Figura 6.2.2: Curva de respuesta del modelo de Von Mises para carga uniaxial

✓ MODELO DE DRUCKER-PRAGER

En Figura 6.2.3 se indica la curva de respuesta del modelo para carga uniaxial. Los parámetros internos (elásticos y elastoplásticos) del modelo considerados fueron

$$E = 30 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0.2$$

$$f'_c = 30 \text{ MPa}$$

$$f'_t = 3 \text{ MPa}$$

$$c = 8 \text{ MPa (cohesión)}$$

$$\phi = 37^\circ \text{ (ángulo de fricción interna)}$$

$$\sigma_c = c / \text{tg } \phi = 10,6 \text{ MPa}$$

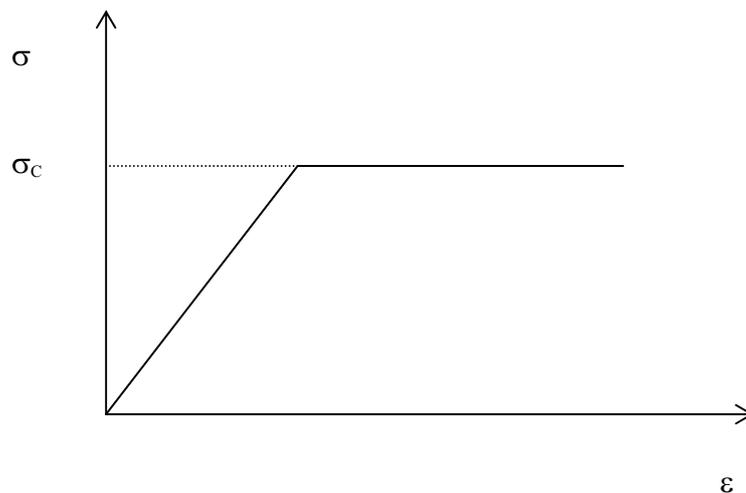


Figura 6.2.3 Curva de respuesta σ - ϵ del modelo de Drucker Prager para carga uniaxial

6.2.1 RESULTADOS OBTENIDOS

6.2.1a ANALISIS CON RESISTENCIA DEL HORMIGON, f'_c , DE 30 MPa

6.2.1a.1 Carga última y desplazamiento máximo

En Tablas VI.2.2, VI.2.3 y VI.2.4 se indican los resultados en términos de carga

última, obtenida como sumatoria de las reacciones nodales correspondientes a los desplazamientos aplicados. Asimismo, se indica el desplazamiento máximo sobre la cabeza del perno, correspondiente al punto A de Figura 6.1.1, para cada uno de los modelos analizados siguiendo los modelos de Von Mises y Drucker Prager para los estados planos de tensiones, plano de deformaciones y axialsimétrico.

Tabla VI.2.2: Carga última y desplazamiento máximo correspondiente a los problemas Axialsimétricos

Modelo	e/a [mm]	Von Mises		Drucker-Prager	
		Pu [kN]	δ [mm]	Pu [kN]	δ [mm]
Modelo 1	150/7.5	20	0.032	108	0.370
Modelo 2	225/7.5	241	0.060	561	0.410
Modelo 3	150/11.25	473	0.055	1380	0.257
Modelo 4	225/11.25	550	0.100	1410	0.310
Modelo 5	75/11.25	12	0.020	80.3	0.200

Tabla VI.2.3: Carga última y desplazamiento máximo correspondiente a los problemas en estado Plano de Tensiones

Modelo	e/a [mm]	Von Mises		Drucker-Prager	
		Pu [kN/mm]	δ [mm]	Pu [kN/mm]	δ [mm]
Modelo 1	150/7.5	0.240	0.060	0.329	0.218
Modelo 2	225/7.5	0.310	0.030	0.359	0.143
Modelo 3	150/11.25	0.250	0.030	0.410	0.168
Modelo 4	225/11.25	0.320	0.096	0.450	0.170
Modelo 5	75/11.25	0.173	0.020	0.395	0.300

Tabla VI.2.4: Carga última y desplazamiento máximo correspondiente a los problemas en estado Plano de Deformaciones

Modelo	e/a [mm]	Von Mises		Drucker-Prager	
		Pu [kN/mm]	δ [mm]	Pu [kN/mm]	δ [mm]
Modelo 1	150/7.5	0.252	0.0315	0.650	0.195
Modelo 2	225/7.5	0.310	0.049	0.689	0.203
Modelo 3	150/11.25	0.380	0.027	0.656	0.126
Modelo 4	225/11.25	0.429	0.122	0.725	0.320
Modelo 5	75/11.25	0.350	0.180	0.310	0.300

En los resultados precedentes es importante notar que

- ✓ Al aumentar el radio del anillo reactivo (e) se incrementa la carga última en todos los casos. Este incremento es mucho más significativo en los problemas axialsimétricos que en los problemas bajo estados planos de tensiones y de deformaciones.
- ✓ Al aumentar el ancho del ala de la cabeza del perno (a) la carga última se incrementa en todos los casos. Este incremento es mucho más significativo en los problemas axialsimétricos que en los problemas bajo estados planos de tensiones y de deformaciones.

En Figuras 6.2.4a, 6.2.4b, 6.2.5a y 6.2.5b se presentan las curvas carga-desplazamiento correspondientes a los modelos de Drucker-Prager y Von Mises en estado axialsimétrico y plano de tensiones, respectivamente.

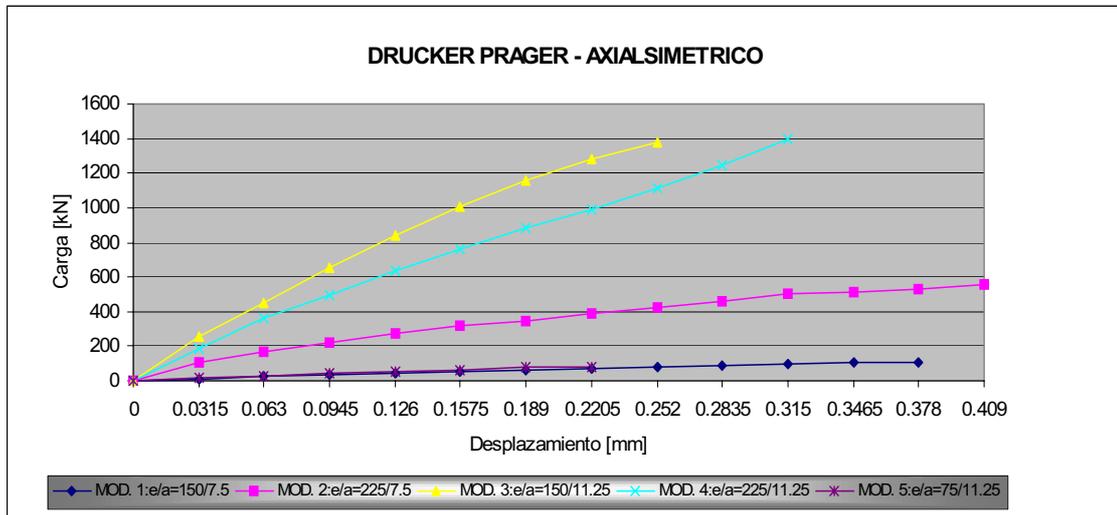


Figura 6.2.4a: Comportamiento carga-desplazamiento del modelo Drucker-Prager en estado axialsimétrico

En la Figura 6.2.4a se observa que:

- ✓ Al aumentar el radio del anillo reactivo (e) la carga última aumenta considerablemente, en todos los casos analizados. Esto es,

$$P_u \text{ Mod 1} < P_u \text{ Mod 2}$$

$$P_u \text{ Mod 4} > P_u \text{ Mod 3} > P_u \text{ Mod 5}$$

- ✓ Al aumentar el ancho del ala de la cabeza del perno (a) la carga última aumenta considerablemente, en todos los casos analizados. Esto es,

$$a \text{ Mod 3} > a \text{ Mod 1} \quad ; \quad P_u \text{ Mod 3} > P_u \text{ Mod 1}$$

$$a \text{ Mod 4} > a \text{ Mod 2} \quad ; \quad P_u \text{ Mod 4} > P_u \text{ Mod 2}$$

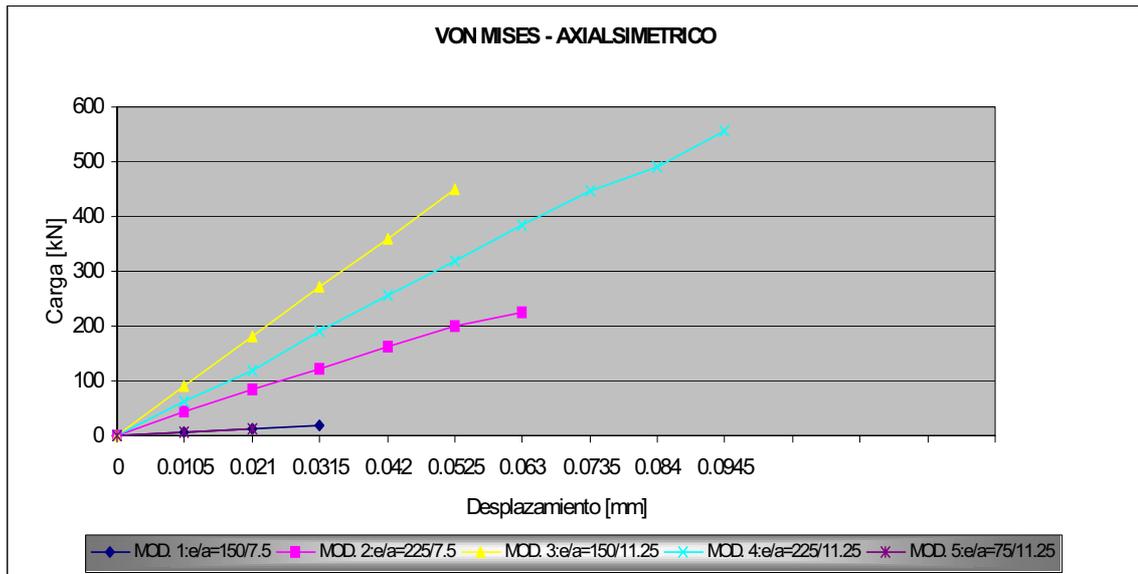


Figura 6.2.4b: Comportamiento carga-desplazamiento del modelo Von Mises en estado axialsimétrico

En la Figura 6.2.4b se observa que:

- ✓ Al aumentar el radio del anillo reactivo (e) la carga última aumenta considerablemente, en todos los casos analizados. Es decir,

$$P_u \text{ Mod 1} < P_u \text{ Mod 2}$$

$$P_u \text{ Mod 4} > P_u \text{ Mod 3} > P_u \text{ Mod 5}$$

- ✓ Al aumentar el ancho del ala de la cabeza del perno (a) la carga última aumenta considerablemente, en todos los casos. Es decir,

$$a \text{ Mod 3} > a \text{ Mod 1} \quad ; \quad P_u \text{ Mod 3} > P_u \text{ Mod 1}$$

$$a \text{ Mod 4} > a \text{ Mod 2} \quad ; \quad P_u \text{ Mod 4} > P_u \text{ Mod 2}$$

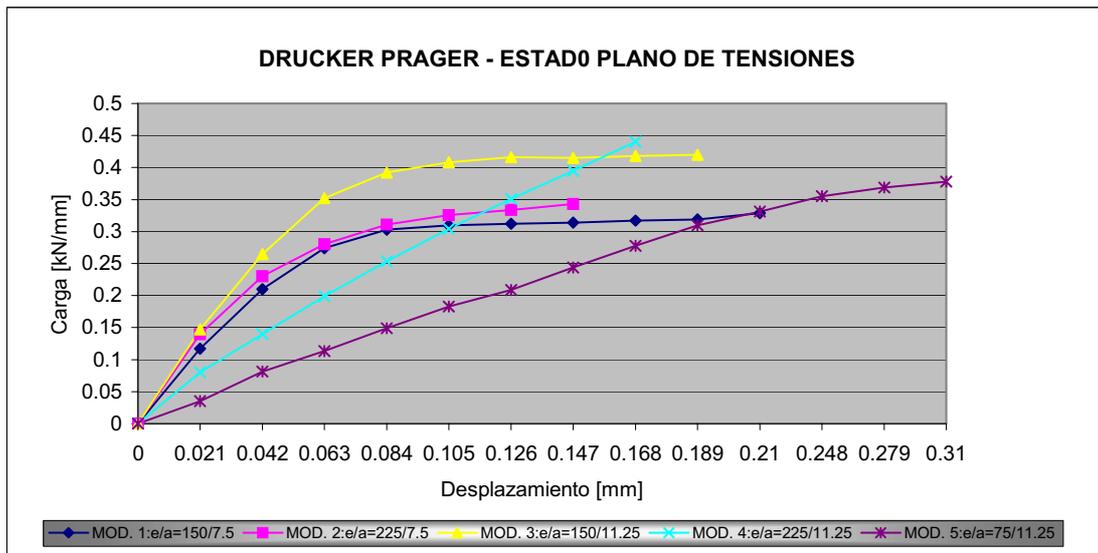


Figura 6.2.5a: Comportamiento carga-desplazamiento del modelo Drucker-Prager en estado plano de tensiones

En la Figura 6.2.5a se observa que:

- ✓ Al aumentar el radio del anillo reactivo (e) aumenta la carga última en todos los casos. Es decir,

$$Pu \text{ Mod } 1 < Pu \text{ Mod } 2$$

$$Pu \text{ Mod } 4 > Pu \text{ Mod } 3 > Pu \text{ Mod } 5$$

- ✓ Al aumentar el ancho del ala de la cabeza del perno (a) la carga última aumenta en todos los casos. Es decir,

$$a \text{ Mod } 3 > a \text{ Mod } 1 \quad ; \quad Pu \text{ Mod } 3 > Pu \text{ Mod } 1$$

$$a \text{ Mod } 4 > a \text{ Mod } 2 \quad ; \quad Pu \text{ Mod } 4 > Pu \text{ Mod } 2$$

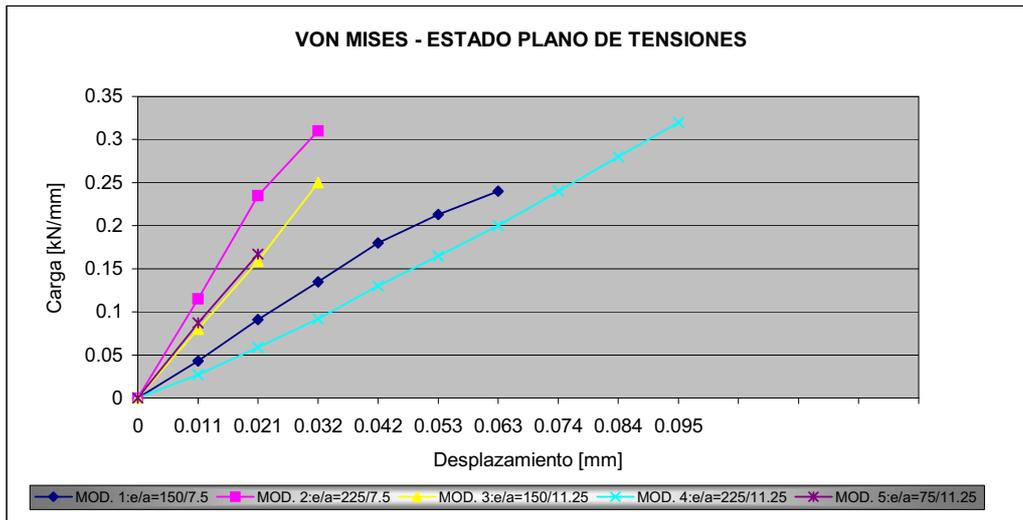


Figura 6.2.5b: Comportamiento carga-desplazamiento del modelo Von Mises en estado plano de tensiones

En la Figura 6.2.5b se observa que:

- ✓ Al aumentar el radio del anillo reactivo (e) aumenta la carga última en todos los casos. Esto es,

$$P_u \text{ Mod 1} < P_u \text{ Mod 2}$$

$$P_u \text{ Mod 4} > P_u \text{ Mod 3} > P_u \text{ Mod 5}$$

- ✓ Al aumentar el ancho del ala de la cabeza del perno (a) la carga última aumenta ligeramente en todos los casos. Esto es,

$$a \text{ Mod 3} > a \text{ Mod 1} \quad ; \quad P_u \text{ Mod 3} > P_u \text{ Mod 1}$$

$$a \text{ Mod 4} > a \text{ Mod 2} \quad ; \quad P_u \text{ Mod 4} > P_u \text{ Mod 2}$$

6.2.1a.2 Resultados gráficos representativos

A continuación se presentan gráficamente algunos de los resultados obtenidos representativos del comportamiento del sistema en estudio.

✓ COMPORTAMIENTO DE ACUERDO AL MODELO DE VON MISES

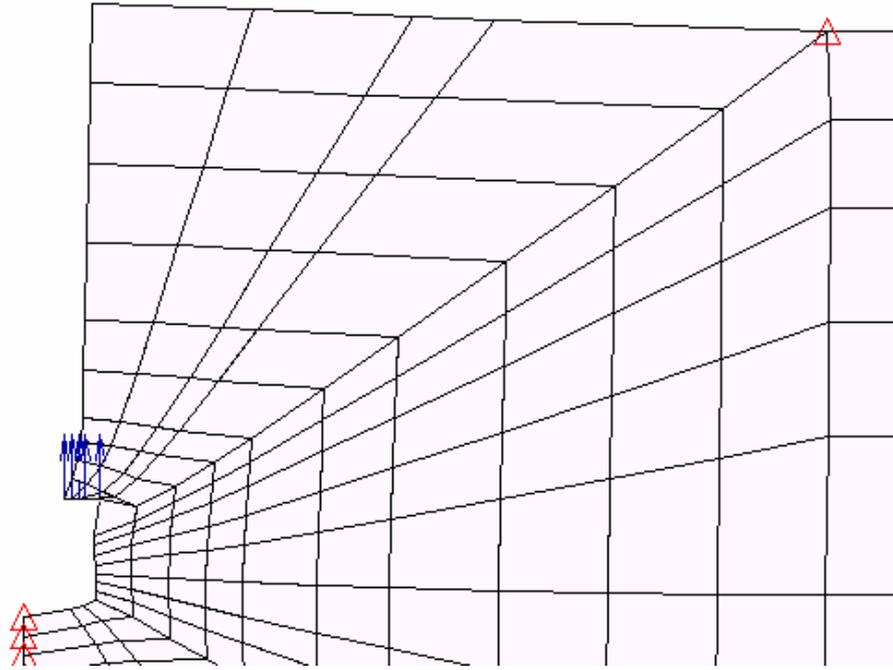


Figura 6.2.6: Deformada correspondiente a Modelo 2 en estado plano de tensiones

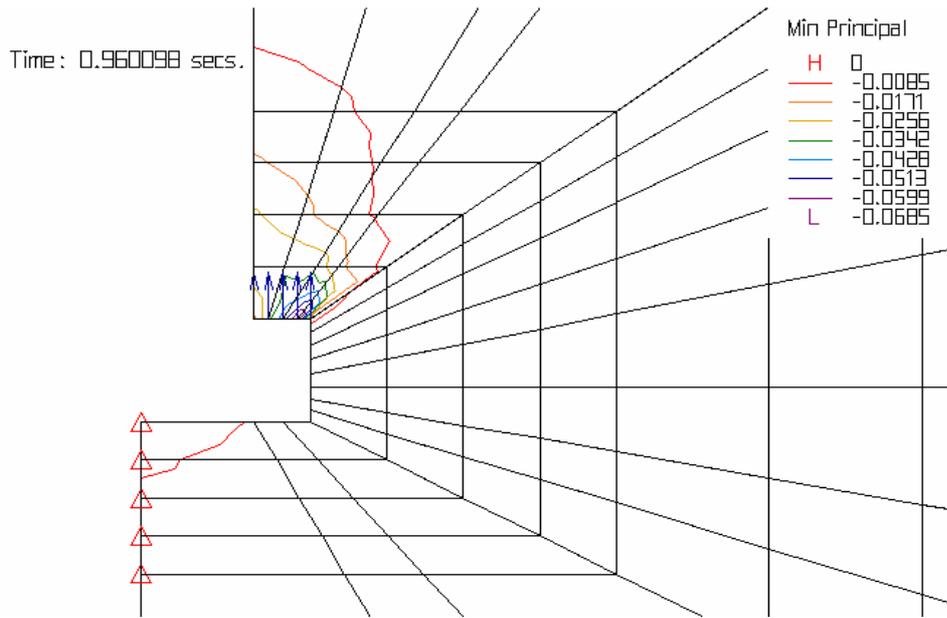


Figura 6.2.7: Curvas de distribución de tensiones mínimas principales del Modelo 2 en estado axialsimétrico.

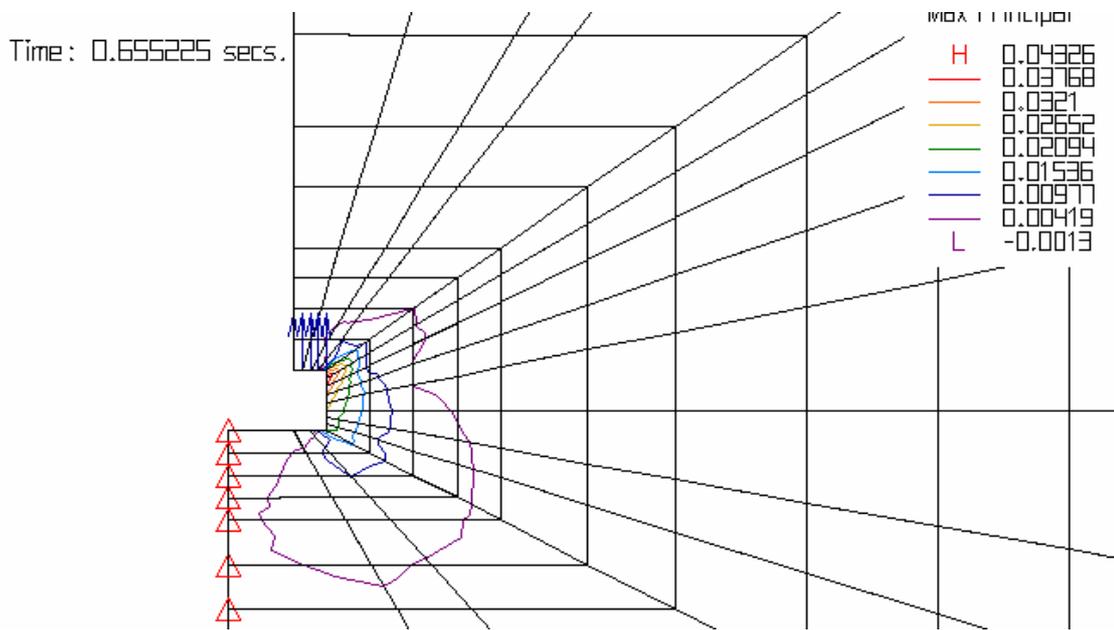


Figura 6.2.8: Curvas de distribución de tensiones máximas principales para la carga máxima, en el caso del Modelo 2 en estado axialsimétrico.

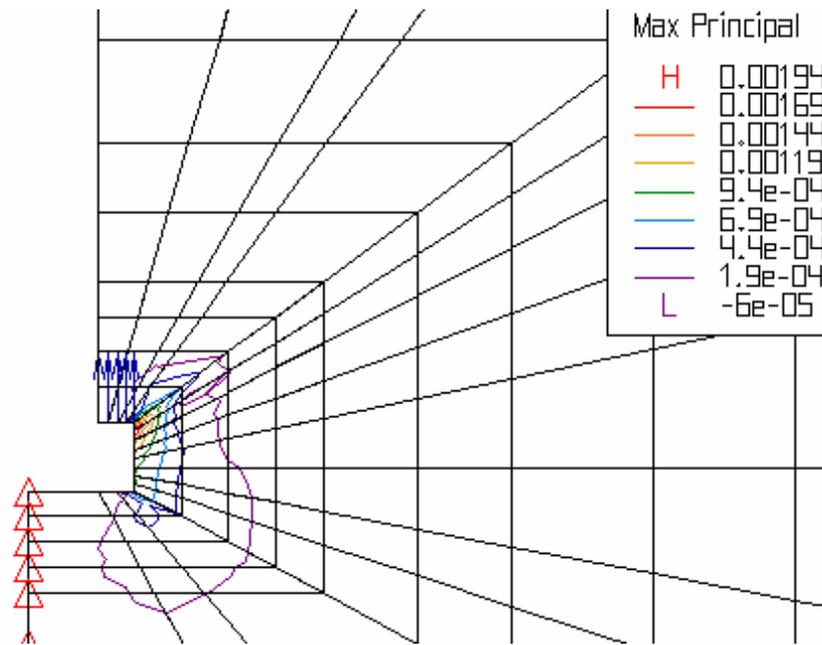


Figura 6.2.9: Curvas de distribución de tensiones máximas principales para el primer paso de desplazamiento, en el caso de Modelo 2 en estado axialsimétrico

✓ COMPORTAMIENTO DE ACUERDO AL MODELO DE DRUCKER-PRAGER

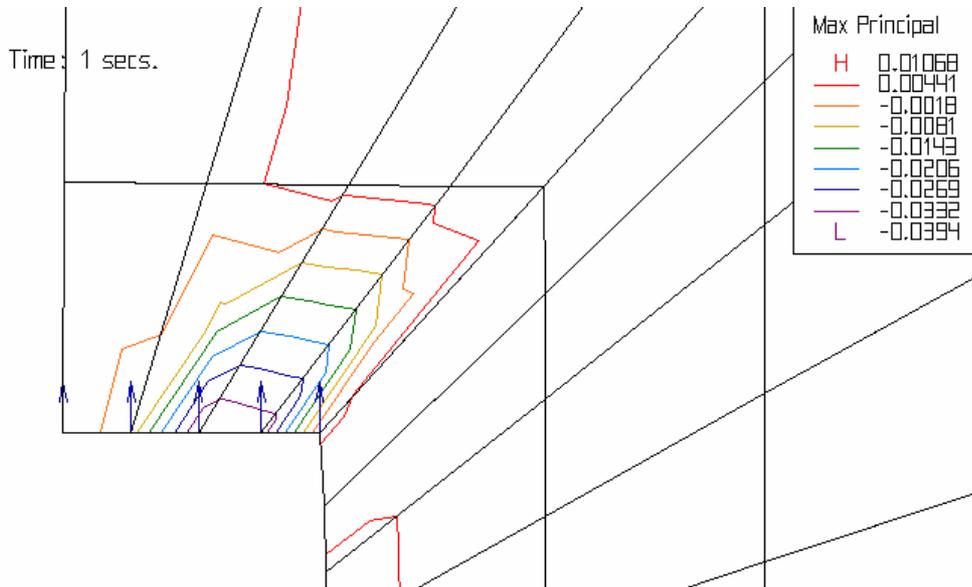


Figura 6.2.10: Curvas de distribución de tensiones máximas principales del Modelo 1 en estado axialsimétrico

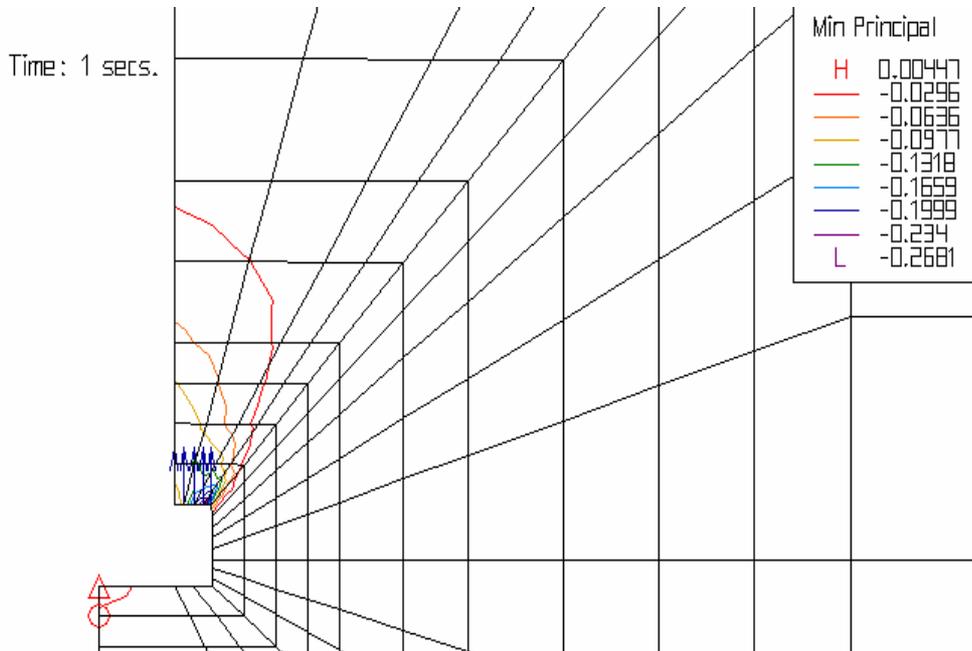


Figura 6.2.11: Curvas de distribución de tensiones mínimas principales del Modelo 1 en estado axialsimétrico

Time: 1 secs.

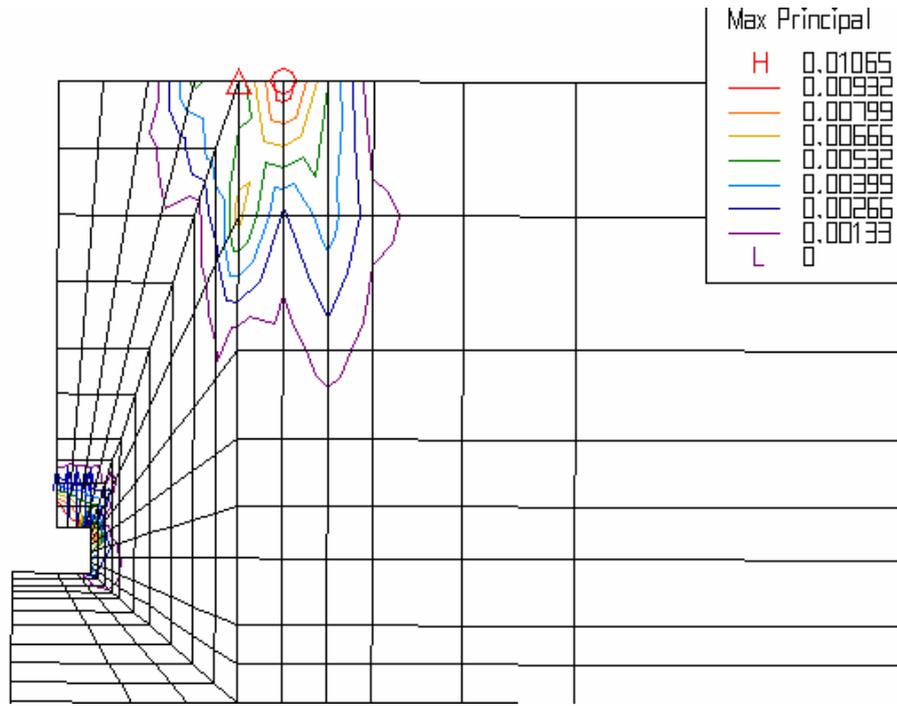


Figura 6.2.12: Curvas de distribución de tensiones máximas principales del Modelo 5 en estado plano de tensiones.

Time: 1 secs.

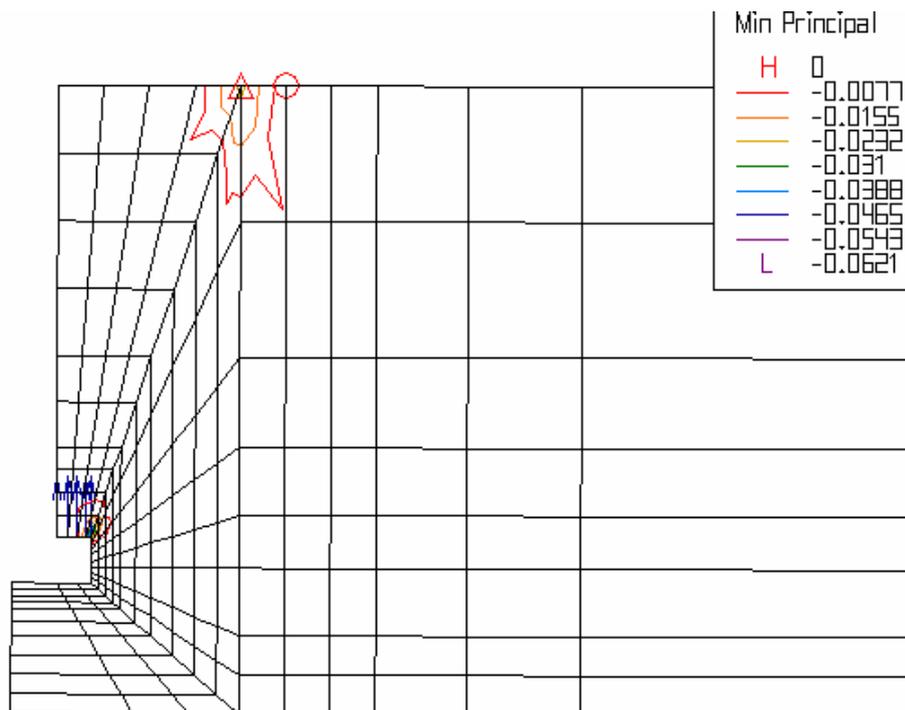


Figura 6.2.13: Curvas de distribución de tensiones mínimas principales del Modelo 5 en estado plano de tensiones.

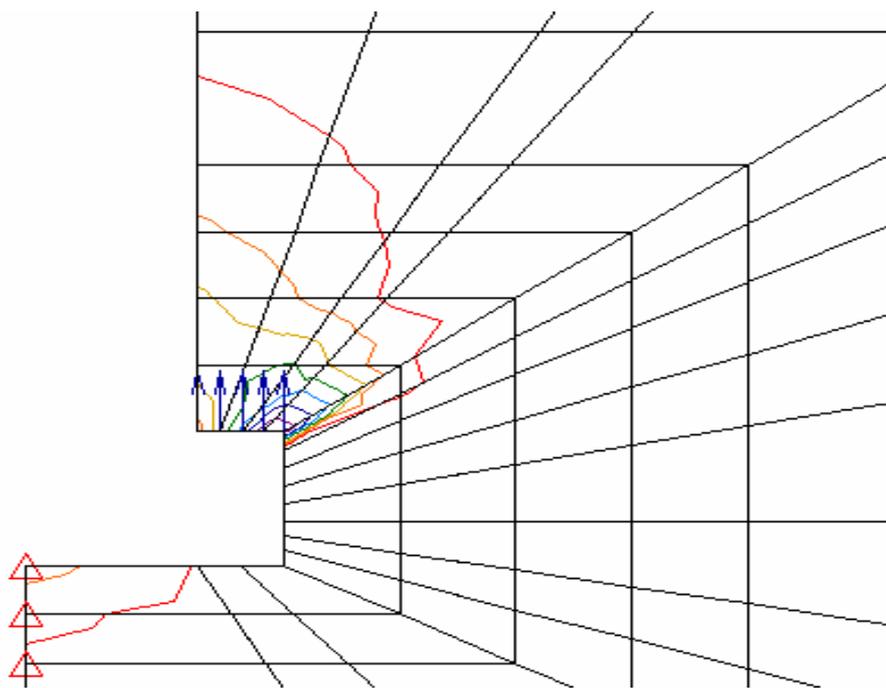


Figura 6.2.14: Curvas de distribución de tensiones mínimas principales para el 10 % de la carga última del Modelo 2 en estado plano de tensiones

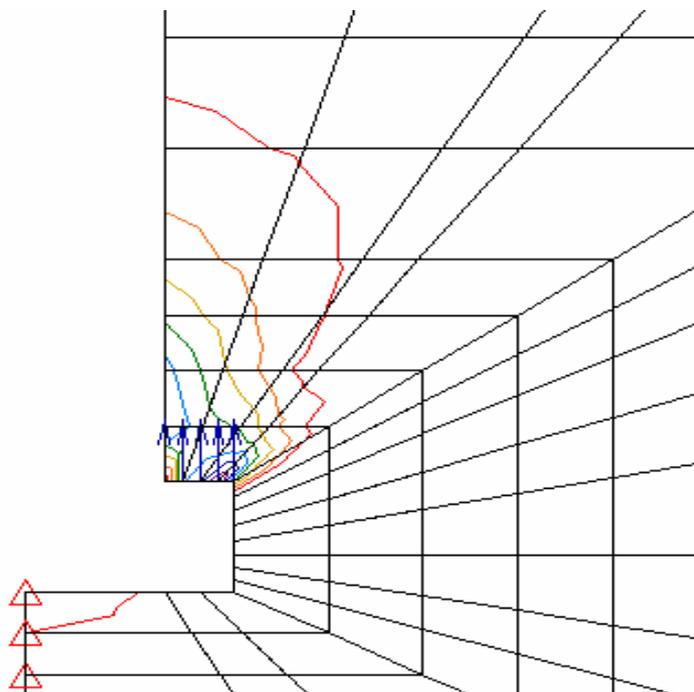


Figura 6.2.15: Curvas de distribución de tensiones mínimas principales para el 50 % de la carga última del Modelo 2 en estado plano de tensiones

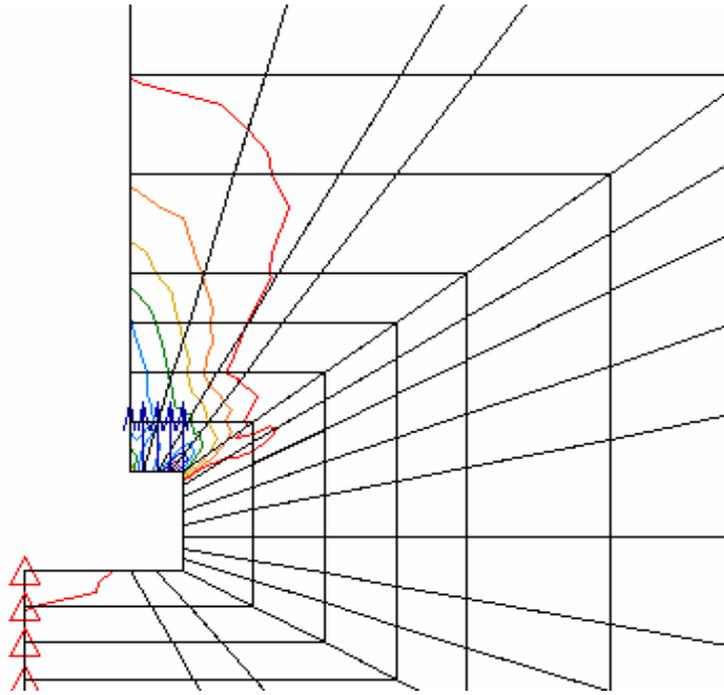


Figura 6.2.16: Curvas de distribución de tensiones mínimas principales correspondiente a la carga última del Modelo 2 en estado plano de tensiones

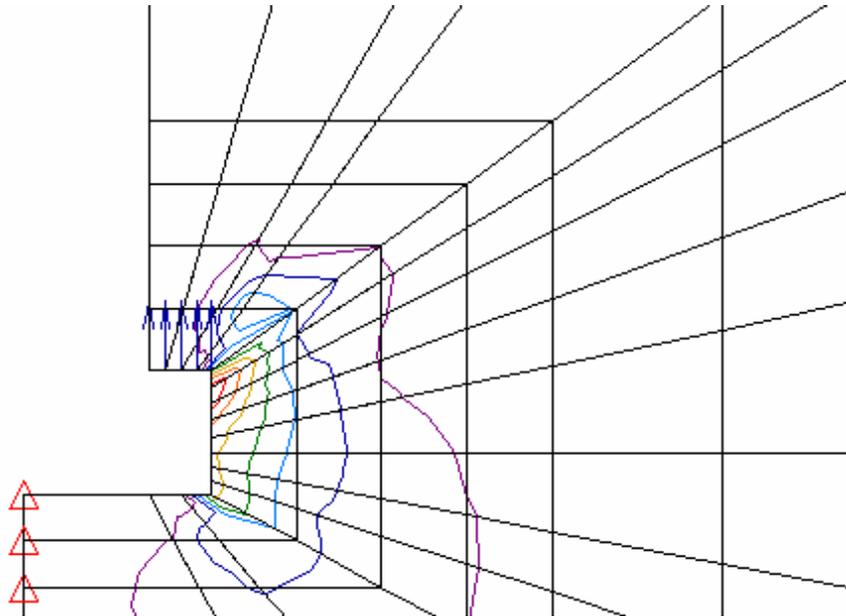


Figura 6.2.17: Curvas de distribución de tensiones máximas principales para el 10 % de la carga última del Modelo 2 en estado plano de tensiones

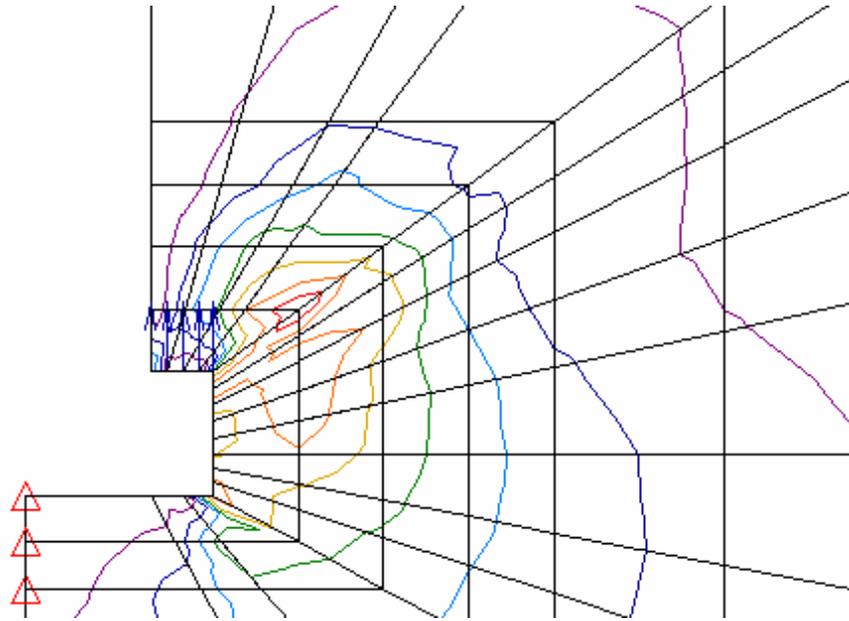


Figura 6.2.18: Curvas de distribución de tensiones máximas principales para el 50 % de la carga última del Modelo 2 en estado plano de tensiones

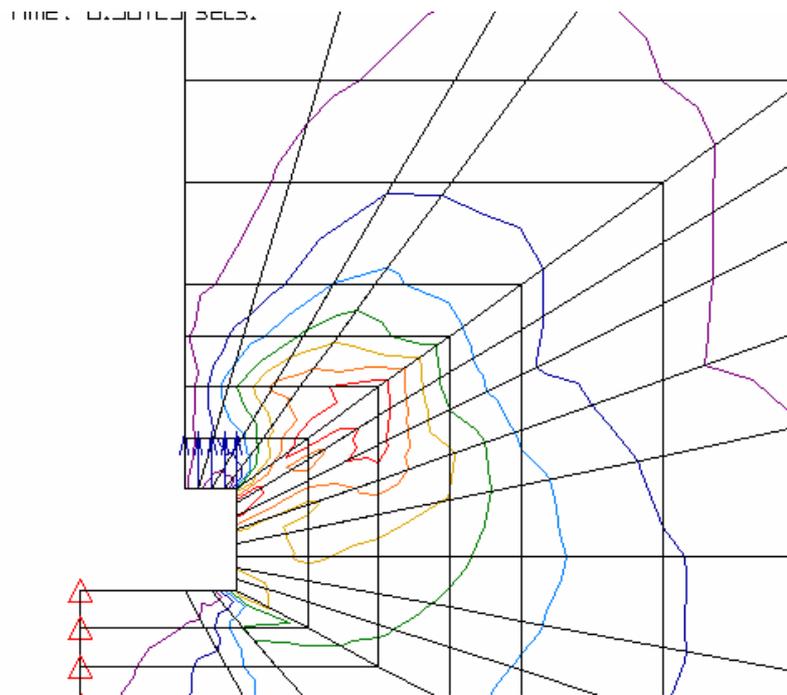


Figura 6.2.19: Curvas de distribución de tensiones máximas principales correspondiente a la carga última del Modelo 2 en estado plano de tensiones

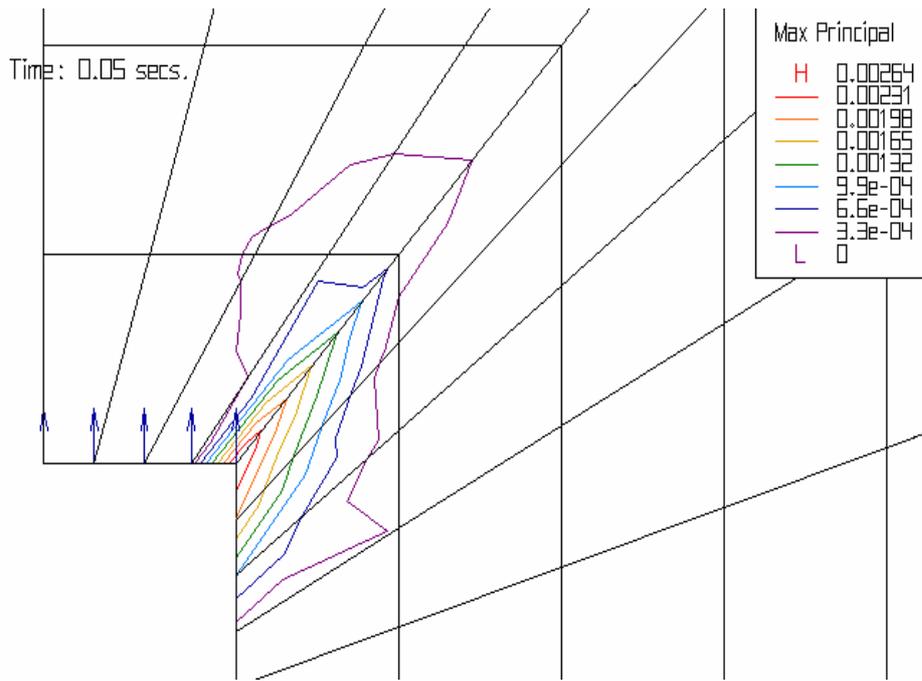


Figura 6.2.20: Curvas de distribución de deformaciones principales para el 10 % de la carga última del Modelo 2 en estado plano de tensiones

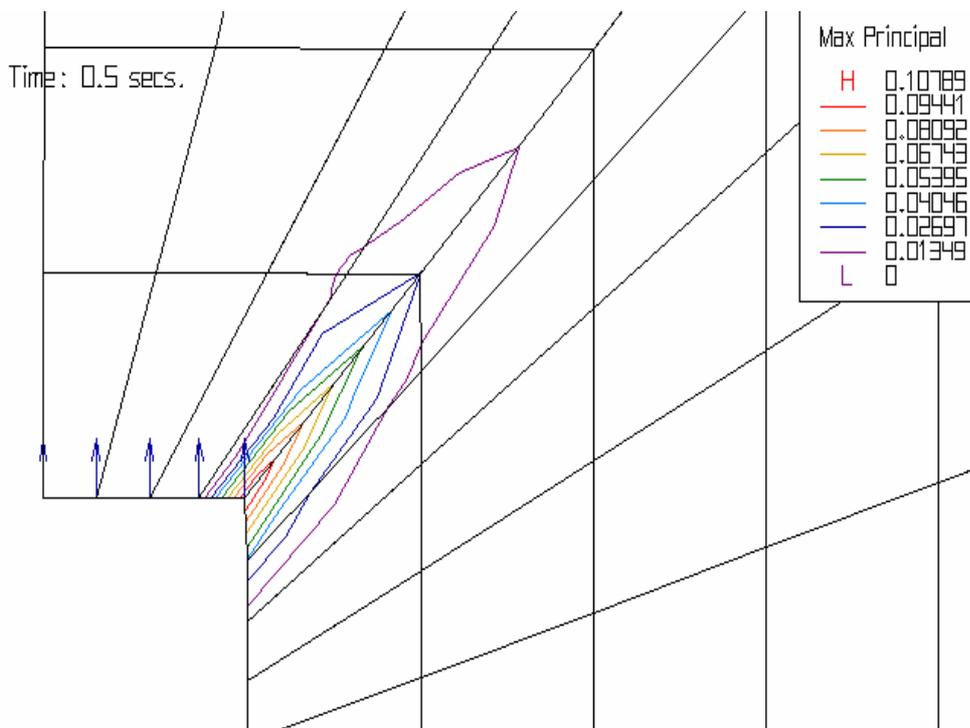


Figura 6.2.21: Curvas de distribución de deformaciones máximas principales para el 50% de la carga última del Modelo 2 en estado plano de tensiones

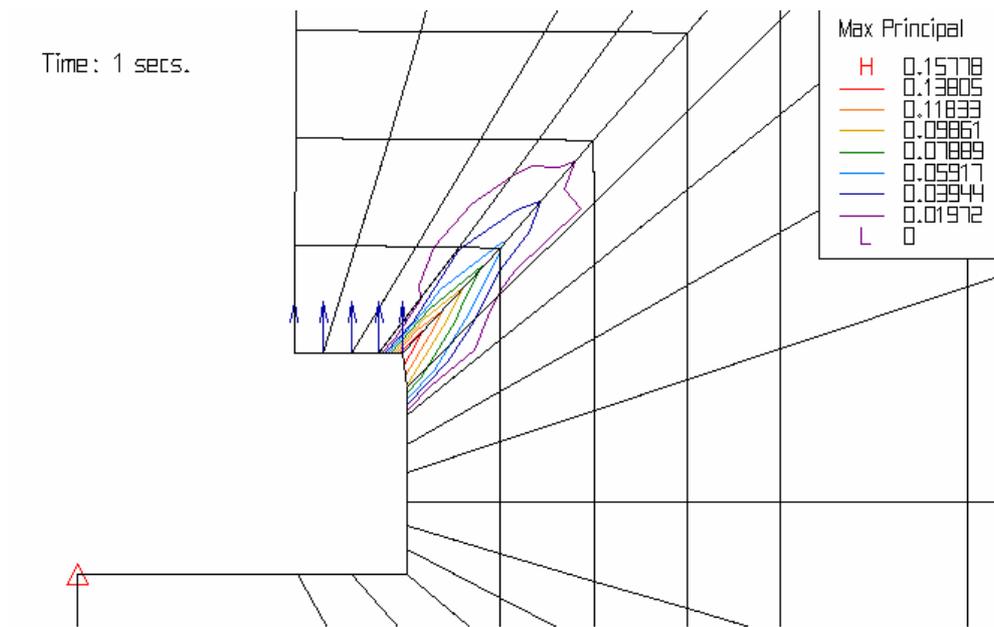


Figura 6.2.22: Curvas de distribución de deformaciones máximas principales para la carga última del Modelo 2 en estado plano de tensiones

6.2.1b ANALISIS COMPARATIVO PARA RESISTENCIAS DEL HORMIGON, $f_c'=30$ MPa y $f_c'=23$ MPa.

Se analiza a continuación la influencia de la resistencia a compresión uniaxial del hormigón en la capacidad de carga del *Ensayo de Extracción* en hormigón. Se consideraron los dos modelos materiales utilizados en el presente estudio en estado plano de tensiones y axialsimétrico y la geometría correspondiente al modelo 3 del análisis precedente. Se considera una resistencia a compresión $f_c'=23$ MPa correspondiente con una reducción del 23 % respecto a la utilizada en los análisis previos.

6.2.1b.1 RESULTADOS COMPARATIVOS

En las siguientes Figuras 6.2.23, 6.2.24, 6.2.25 y 6.2.26 se indican las curvas correspondientes al comportamiento carga-desplazamiento para los casos analizados

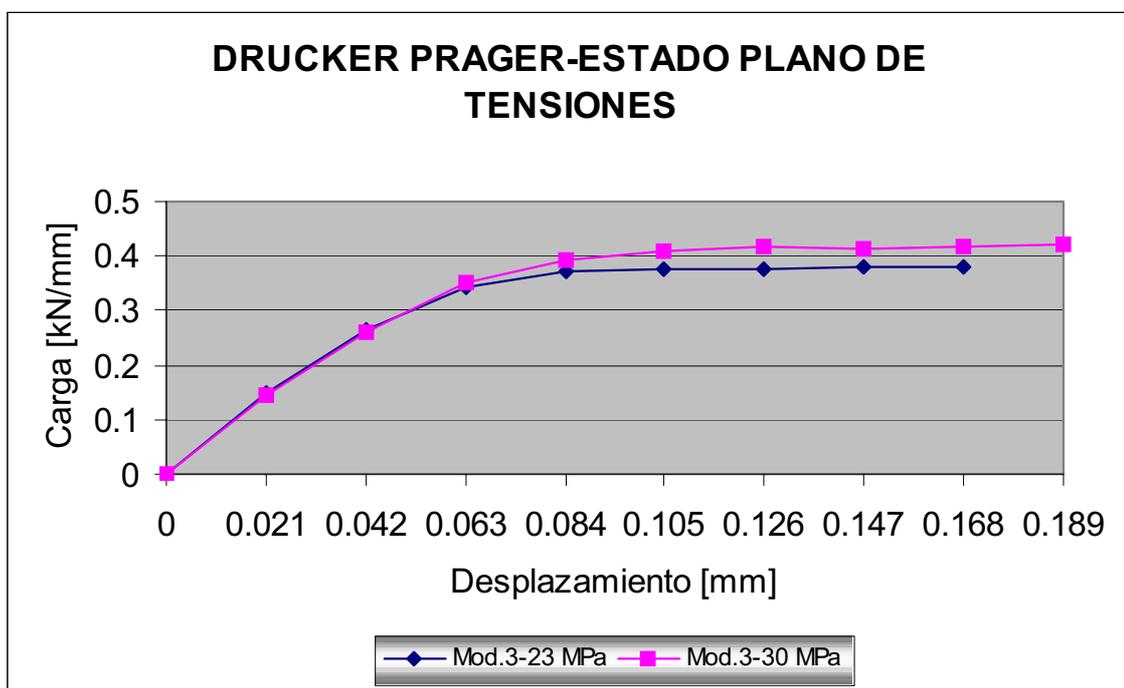


Figura 6.2.23: Comportamiento carga-desplazamiento para las dos calidades de hormigón analizadas con el modelo Drucker-Prager en estado plano de tensiones.

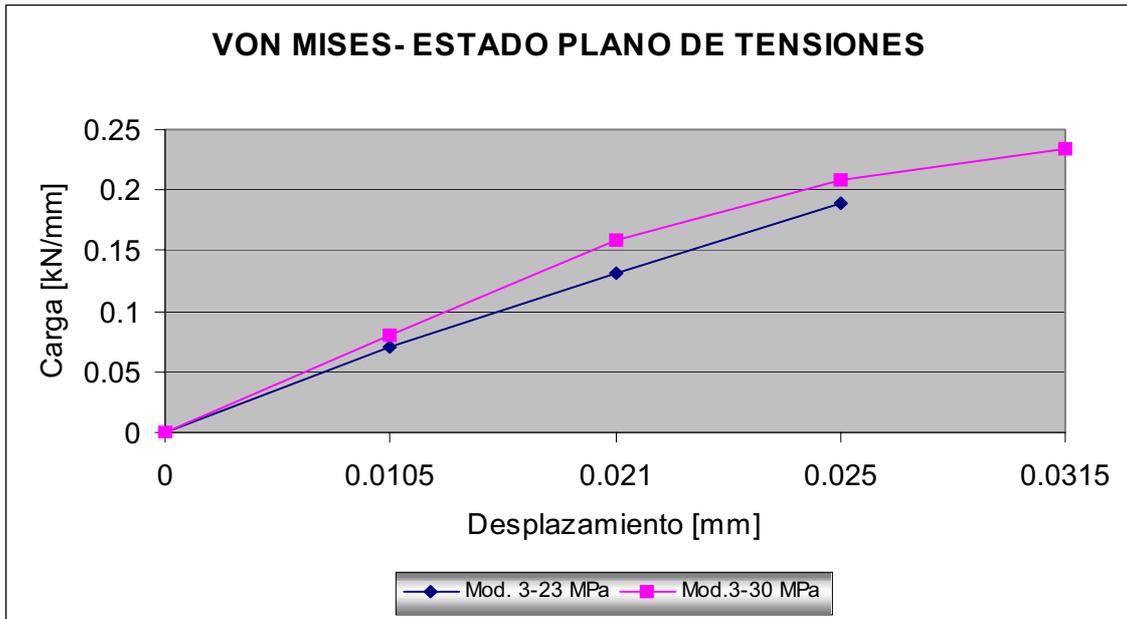


Figura 6.2.24: Comportamiento carga-desplazamiento para las dos calidades de hormigón analizadas con el modelo de Von Mises en estado plano de tensiones.

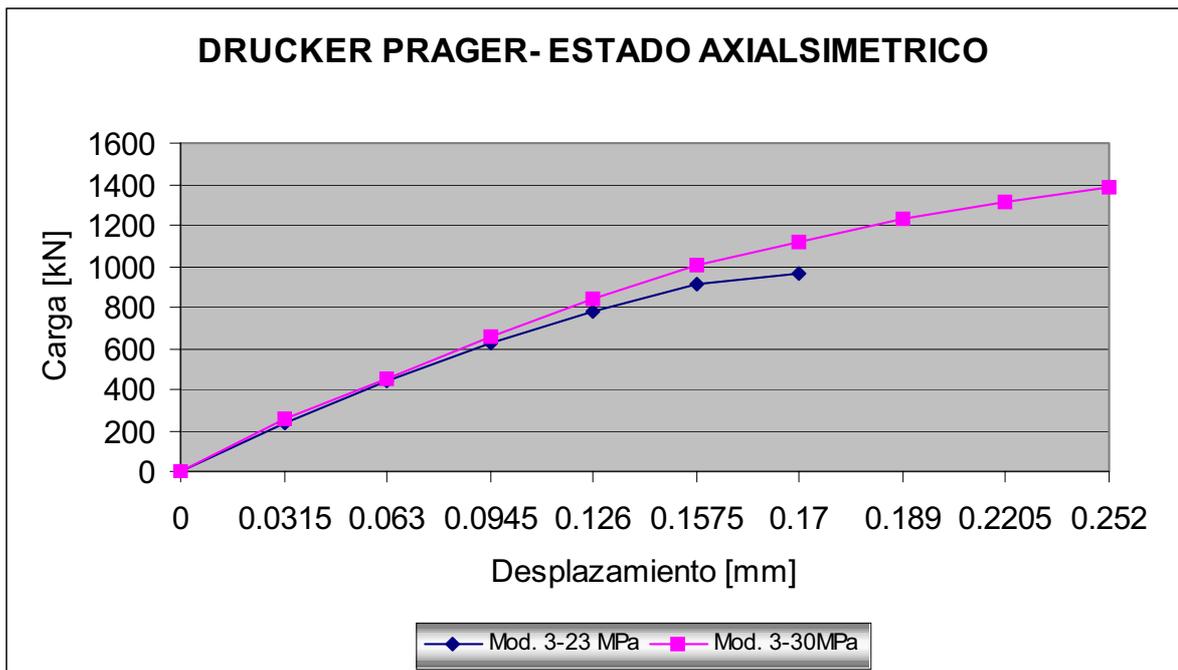


Figura 6.2.25: Comportamiento carga-desplazamiento para las dos calidades de hormigón analizadas con el modelo de Drucker-Prager en estado axialsimétrico.

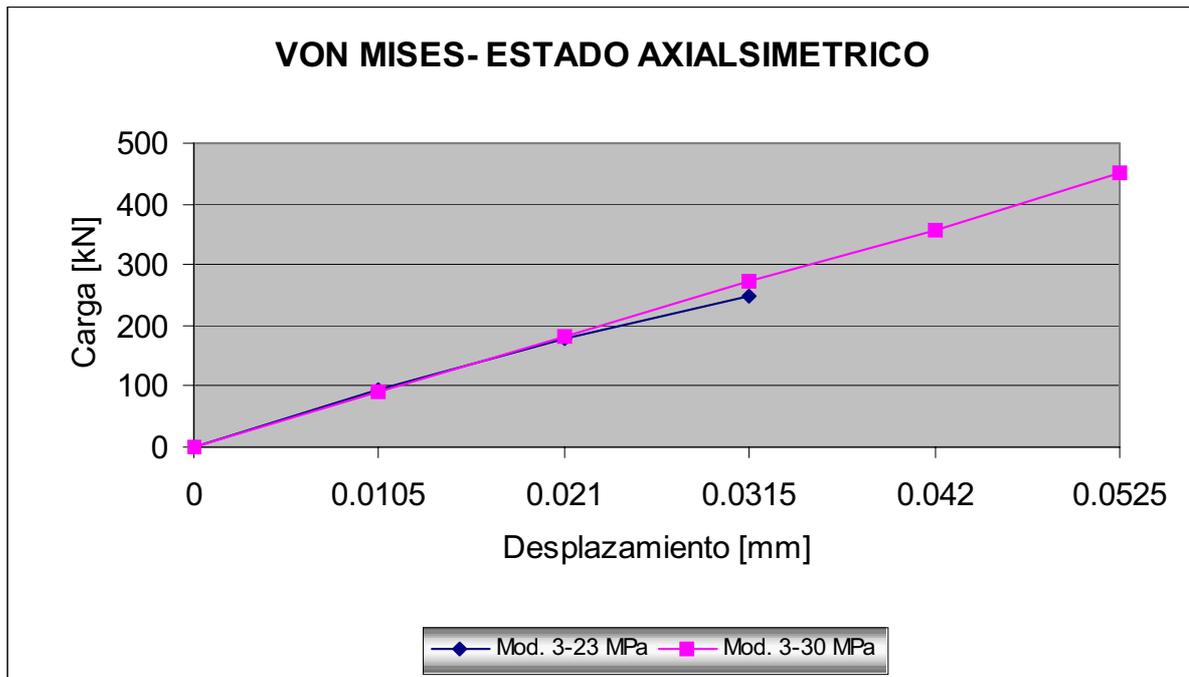


Figura 6.2.26: Comportamiento carga-desplazamiento para las dos calidades de hormigón analizadas con el modelo de Von Mises en estado axialsimétrico.

De los resultados obtenidos se concluye lo siguiente

- ✓ En todos los casos la reducción de la resistencia a compresión del hormigón conlleva a una reducción de la carga última debido a una mayor reducción de la rigidez del sistema.
- ✓ El comportamiento de los ensayos correspondientes al modelo de Drucker-Prager presenta una mayor ductilidad que los correspondientes al modelo de Von Mises.

6.2.2 ANALISIS Y COMPARACION DE RESULTADOS

Distribución de Tensiones y Deformaciones

- ✓ Como era de esperar los modelos elastoplásticos permiten evaluar no solamente la distribución de tensiones y de deformaciones en el cuerpo del *pull-out test*, así como la influencia de la geometría, sino también el comportamiento de falla (dúctil/frágil) y la capacidad o resistencia del ensayo.
- ✓ La deformada indicada en Figura 6.2.6 permite inferir el mecanismo de falla del *Ensayo de Extracción*, el cual conlleva a la formación de una superficie cónica limitada por los sectores de localización de falla o microfisuras, tanto cuando se considera el modelo de Von Mises como el modelo de Drucker-Prager, en un todo de acuerdo con los estudios de otros autores relevados en el presente trabajo.
- ✓ En las Figuras 6.2.7, 6.2.8 y 6.2.9 se observan las distribuciones de tensiones principales mínimas y máximas, de acuerdo al criterio de Von Mises, que se condicen con las distribuciones obtenidas por Elfgren *et al.* (1980), Etse (1998). Asimismo, se visualiza en las Figuras 6.2.8 y 6.2.9 la evolución de las tensiones con el incremento de la acción y la aparición de tensiones máximas principales de compresión en la cabeza del perno, las que son responsables de la elevada tensión de confinamiento del hormigón en este sector con el consecuente incremento de la ductilidad global del sistema. Esto coincide con lo demostrado en el estudio realizado por Sfer *et al.* (2000).
- ✓ En Figuras 6.2.10 y 6.2.11 correspondientes a la aplicación del modelo de Drucker-Prager se observa una fuerte compresión en el hormigón sobre la cabeza del perno a través de los valores negativos de las tensiones máximas y mínimas principales en coincidencia con los estudios realizados por Etse (1998).
- ✓ En Figuras 6.2.12 y 6.2.13 se presentan las distribuciones de tensiones máximas y mínimas en el Modelo 5 resultantes de la aplicación de la formulación constitutiva de Drucker-Prager en estado plano de tensiones. Dichas distribuciones muestran como las tensiones máximas en la cabeza

del perno se aplanan con respecto a las distribuciones obtenidas en los modelos 1, 2, 3 y 4. Por otro lado, se observa una fuerte concentración de tensiones en correspondencia con los apoyos.

- ✓ En Figuras 6.2.14, 6.2.15, 6.2.16, 6.2.17, 6.2.18 y 6.2.19 se aprecia la penetración en el hormigón hacia el apoyo, del estado tensional con el incremento de la carga, en términos de tensiones principales mínimas y máximas.
- ✓ En Figuras 6.2.20, 6.2.21 y 6.2.22 se puede observar la evolución con el incremento de la carga de la deformación y la orientación siguiendo la dirección que une la cabeza del perno con el apoyo del anillo.
- ✓ Los resultados en el presente trabajo indican claramente que el modelo de Drucker-Prager conlleva a tensiones de compresión, sobre la cabeza del perno, significativamente mayores a las correspondientes al modelo de Von Mises. Esto es consecuencia de la dependencia de la resistencia pico en la presión hidrostática que define el criterio de Drucker-Prager, contrariamente al de Von Mises. Dado el hecho que esta dependencia es característica de materiales cohesivos-friccionales como el hormigón, se deduce entonces que las predicciones del modelo de Drucker-Prager son más realistas en el presente caso.

Influencia de la geometría

- ✓ Las diferencias en los resultados expresados en las Tablas VI.2.2, VI.2.3, VI.2.4 y Figuras 6.2.4 a y b y 6.2.5 a y b, indican la sensibilidad del sistema a la variación de los parámetros geométricos estudiados, de acuerdo con lo demostrado por los resultados de RILEM TC-90 FMA, (1991)
- ✓ Los modelos analizados permiten, a través de las distribuciones de tensiones y de deformaciones analizadas y de la observación de la deformada del sistema, predecir el mecanismo de falla del *Ensayo de Extracción* a través de la formación de una superficie cónica, lo cual indica que las relaciones geométricas adoptadas son adecuadas a fin de obtener este tipo de falla.
- ✓ La influencia del tamaño de la cabeza del perno fue estudiada y su incidencia puede analizarse con los resultados de las Tablas VI.2.2, VI.2.3,

VI.2.4 y de las Figuras 6.2.4a y b y 6.2.5a y b, a través de la comparación de los modelos 3 con 1 y 4 con 2, en los que se ha realizado un incremento del 50% en el ancho del ala de la cabeza de los primeros respecto de los segundos. Dicho análisis permite establecer que un aumento en el tamaño de la cabeza del perno produce un aumento sustancial en la carga última del sistema en los modelos axialsimétricos mientras que en los modelos en estado plano de tensiones y de deformaciones este aumento es mucho menos significativo. Paralelamente, los modelos Drucker-Prager axialsimétricos muestran una fuerte caída de la ductilidad del sistema debido a una disminución de la tensión de compresión por encima de la cabeza del anclaje con el aumento del ancho del ala del mismo (a).

- ✓ La influencia de la distancia del eje del perno al anillo reactivo (e) puede analizarse con los resultados de las Tablas VI.2.2, VI.2.3, VI.2.4 y de las Figuras 6.2.4 a y b y 6.2.5 a y b, comparando los resultados correspondientes a los Modelos 2 y 1 por un lado y 4 con 3 y 5 por otro, en los que se ha establecido una variación de dicho parámetro de manera decreciente manteniendo la profundidad del perno (l_d).

La observación de los resultados obtenidos permite indicar que a igualdad de ancho de cabeza (a) y profundidad (l_d) la carga última varía de acuerdo a lo siguiente

$$Pu \text{ Mod } 2 > Pu \text{ Mod } 1$$

$$Pu \text{ Mod } 4 > Pu \text{ Mod } 3 > Pu \text{ Mod } 5$$

Es decir, reduciendo la distancia del eje del perno a la reacción del sistema disminuye la carga última del mismo.

La interpretación de la influencia de este parámetro en la carga última puede realizarse más acabadamente mediante la comparación del problema del *pull-out test* con el de flexión en vigas de esbelteces iguales a $2e/l_d$, según se analiza en el Apéndice y que en este caso corresponden a

Modelos 1 y 3	esbeltez: $2e/l_d = 2$
Modelos 2 y 4	esbeltez: $2e/l_d = 3$
Modelo 5	esbeltez: $2e/l_d = 1$

La mayor carga última en los Modelos 2 y 4 se justifica porque las relaciones geométricas de los mismos hacen que su comportamiento sea comparable al de las vigas esbeltas. En el caso de los Modelos 1, 3 y más aún en el 5 el comportamiento es comparable al de las vigas de gran altura. Es por ello que estos modelos presentan una menor carga última respecto de los 2 y 4 debido a que en los apoyos se originan fuertes concentraciones de tensiones lo que hace que la rotura se produzca por falla del hormigón en la zona del apoyo. Esto se puede observar en las distribuciones de tensiones máximas y mínimas principales del Modelo 5 indicadas en Figuras 6.2.12 y 6.2.13. Estos resultados se condicen con los resultados experimentales obtenidos por Barr *et al.* (1991)

Carga última y Ductilidad del sistema

- ✓ La capacidad de carga de los modelos de Drucker Prager es claramente mayor que la capacidad de carga de los modelos de Von Mises, tal lo observado en los resultados de las Tablas VI.2.2, VI.2.3, VI.2.4 y en las curvas carga-desplazamiento indicadas en Figuras 6.2.4 a y b y 6.2.5 a y b. Esto se debe a la dependencia del primer invariante de tensiones del criterio de Drucker-Prager.
- ✓ En las Figuras 6.2.4 a y b y 6.2.5 a y b se visualiza la ductilidad del sistema a través de una paulatina caída de rigidez hasta alcanzar la carga última. Esta ductilidad depende del comportamiento de deformación del hormigón ubicado sobre la cabeza del perno y por lo tanto de la calidad del mismo.
- ✓ El análisis anterior convalida la dependencia directa de la carga última con la resistencia del hormigón indicada por estudios numéricos realizados por Etse (1998) y por las fórmulas empíricas de Tabla 2.1 derivadas, en general, de estudios experimentales según Walther *et al.*, (1991)
- ✓ De acuerdo a lo observado en Figuras 6.2.23, 6.2.24, 6.2.25 y 6.2.26 la reducción de la rigidez del sistema se produce más tempranamente al disminuir la calidad del hormigón lo que conduce a un comportamiento global del sistema más dúctil.
- ✓ La disminución en la capacidad de carga con la disminución de la resistencia a compresión del 23 % es aproximadamente del 20 % en los

modelos planos de tensiones y de aproximadamente el 30 % en los modelos axialsimétricos.

- ✓ La validación de las fórmulas empíricas de Tabla 2.1 a través de ensayos experimentales realizada por Walther *et al.* (1991) permitió observar que la fórmula de Bode & Roik es la que mejor se ajusta a los resultados de los ensayos realizados. La carga última de acuerdo a la ecuación de Bode & Roik para el caso del Modelo 1 en estudio es

$$P_u = 28.7(l_d)^{1.5} \sqrt{f'_c}$$

donde: $l_d = 5.9 \text{ in} = 150 \text{ mm}$

$$f'_c = 4351.14 \text{ psi} = 30 \text{ MPa}$$

Utilizando en la expresión de P_u , l_d en libras y f'_c en libras/pulgadas², se obtiene $P_u = 27130 \text{ lb} = 120 \text{ kN}$.

Esto permite concluir que de los modelos analizados, el Modelo 1 con la modelación material de Drucker Prager en estado axialsimétrico y en estado plano de tensiones es el que más se aproxima a los resultados de la ecuación de Bode & Roik ya que en el caso axialsimétrico la carga última obtenida es 108 kN y en estado plano de tensiones es 0.329 kN/mm. En el caso de estado plano de deformaciones se aleja del valor indicado.

- ✓ Los análisis realizados con el modelo de Drucker-Prager muestran la gran ductilidad del sistema a través de su capacidad de deformarse antes de agotar su capacidad de carga. Esto no se observa en los análisis realizados utilizando el modelo de Von Mises. Lo indicado es consecuencia de la dependencia de la resistencia pico de la presión hidrostática que define el modelo de Drucker-Prager, propio de los materiales cohesivos-friccionales como el hormigón, con lo cual se observa que este modelo permite predecir el comportamiento del sistema en estudio de manera más realista.

CAPITULO 7
CONCLUSIONES
Y RECOMENDACIONES

CAPITULO 7

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

7.1 INTRODUCCION

El diseño o verificación de sistemas estructurales constituidos por pernos con cabeza anclados en hormigón es un problema recurrente en ingeniería estructural. Pero más allá de su uso extensivo y generalizado, dichos sistemas han sido propuestos por diversos organismos internacionales para utilizarlo como representativo para determinar la resistencia del hormigón. Por estas razones es que el comportamiento de pernos de acero anclados en hormigón ha sido muy estudiado a través de programas de investigación analíticos, numéricos y experimentales.

En el presente trabajo, se analizó la capacidad predictiva que brindan teorías constitutivas elásticas lineales y elastoplásticas del mecanismo de respuesta de sistemas estructurales constituidos por pernos con cabeza anclados en hormigón, representativos del *Ensayo de Extracción* en hormigón. En particular, se analizó la influencia de la geometría, de la resistencia del hormigón y del estado tensional dominante en el mecanismo y forma de falla de los sistemas de pernos anclados en hormigón.

De los múltiples estudios computacionales llevados a cabo y del análisis de sus correspondientes resultados, se infieren las conclusiones que se detallan a continuación.

7.2 CONCLUSIONES

- ✓ Los análisis elásticos del comportamiento de pernos anclados en hormigón, si bien impiden la evaluación de la capacidad y resistencia de los mismos, permiten la optimización del modelo computacional en consideración, en lo

concerniente a la geometría, discretización espacial, condiciones de borde, acciones, constantes materiales y estrategia numérica.

- ✓ Los análisis y resultados elásticos conducen a la relevante conclusión que aún con dicho modelo material simple es factible obtener información precisa de la influencia de los parámetros geométricos del *Ensayo de Extracción* en hormigón. Esta es una contribución de importancia dada la proliferación y accesibilidad de herramientas computacionales con modelos elásticos.
- ✓ Dado el fuerte confinamiento que se desarrolla en el ensayo de extracción de pernos en hormigón debido al estado tensional reinante (fuerte compresión triaxial en la cabeza del perno), puede inferirse que el comportamiento del sistema hasta la rotura es altamente dúctil. De esto se infiere lo pertinente del uso de teorías constitutivas elastoplásticas, dentro de ciertos límites geométricos establecidos.
- ✓ Considerando que en las zonas donde se ha superado la tensión de tracción admisible del hormigón se ha iniciado la fisuración, se puede observar el desarrollo progresivo de la falla a través de la evolución de las isolíneas de tensiones.
- ✓ La evolución de las isolíneas de deformaciones permite, asimismo, el seguimiento del desarrollo de la falla.
- ✓ El desarrollo de las fisuras, de acuerdo a lo anterior, comienza en el vértice del hormigón vecino a la cabeza del perno propagándose en la dirección del apoyo en total coincidencia con las conclusiones de otros autores.
- ✓ Las predicciones elásticas y elastoplásticas permitieron visualizar adecuadamente el mecanismo de falla a través de la formación de un cono de extracción.
- ✓ Las predicciones elastoplásticas permitieron la determinación de la carga última del sistema.
- ✓ De la comparación de los resultados obtenidos con los modelos de Von Mises y de Drucker-Prager se concluye que la consideración de teorías constitutivas con criterios de falla dependientes del primer invariante de tensiones (presión hidrostática), como el criterio de Drucker-Prager, es de fundamental importancia para la predicción realista del comportamiento del *Ensayo de Extracción* en virtud de la fuerte heterogeneidad de estados

tensionales que se generan en el mismo con marcada presencia de zonas altamente comprimidas. Esto conlleva a un comportamiento marcadamente dúctil que de ninguna manera puede predecirse mediante criterios de resistencia independientes de la presión de confinamiento como el criterio de Von Mises.

- ✓ Los resultados, en el presente trabajo, permiten indicar que la influencia de la variación de los parámetros geométricos a y e es de fundamental importancia en el comportamiento de deformación o ductilidad del sistema. Esta influencia es más notable en los modelos axialsimétricos que en los modelos en estados planos de tensiones y en estados planos de deformaciones.
- ✓ El análisis de la influencia de la geometría permite indicar que es recomendable, en los sistemas de pernos anclados representativos del *Ensayo de Extracción* en hormigón, la utilización de relaciones $2e/l_d \geq 2$ a fin de lograr una adecuada correlación de la carga última del ensayo con la resistencia del hormigón, en un todo de acuerdo con la recomendación que en este sentido da ASTM C 900 (1993).
- ✓ Los análisis realizados permiten indicar que el parámetro geométrico a , correspondiente al ala del perno, influye en la ductilidad del ensayo y en la carga última resultante. De acuerdo a los resultados obtenidos la adopción de las siguientes relaciones es adecuada para la determinación de la geometría del perno anclado: $a = \frac{l_d}{20}$ y $D = \frac{3l_d}{10}$.
- ✓ La influencia de la resistencia a compresión del hormigón en el comportamiento de deformación y en la carga límite es decisiva en todos los casos analizados.
- ✓ La relación directa que existe entre la calidad del hormigón que constituye el sistema y la carga última permite inferir que el ensayo de extracción en hormigón sería adecuado para realizar el control de calidad de un hormigón puesto en obra, fundamentalmente para realizar un seguimiento "in situ" de la evolución de la resistencia del hormigón de elementos estructurales, tal como se ha observado para otros END en Di Maio *et al.* (2000)
- ✓ El presente trabajo posibilitó ahondar en teorías de gran relevancia como es la teoría del flujo de la plasticidad y las relacionadas con la aplicación no

lineal del Método de los Elementos Finitos aplicadas a problemas complejos de mecánica estructural. Asimismo, permitió corroborar la necesidad de validar los modelos representativos de un problema real, dada la alta sensibilidad de los mismos a los aspectos geométricos, condiciones de borde, estado de cargas, modelo material adoptado y estrategia numérica.

7.3 RECOMENDACIONES PARA TRABAJOS FUTUROS

Se sugieren diversos estudios para investigaciones futuras con el objeto de validar los modelos analizados. Dichos estudios son los siguientes

- a) Análisis del problema a través de otros criterios constitutivos inelásticos.
- b) Análisis del problema considerando la influencia de otras relaciones entre la profundidad del perno (l_d) y el diámetro del mismo ($d=D-2a$).
- c) Análisis del problema a través de modelos tridimensionales utilizando teorías constitutivas elásticas e inelásticas.
- d) Análisis numérico y experimental de la influencia del efecto tamaño en el comportamiento no lineal de respuesta del sistema de pernos embebidos en hormigones.
- e) Análisis de la influencia de la velocidad de la carga de extracción en el comportamiento de respuesta del ensayo y en la capacidad y resistencia del sistema. Esto requerirá, desde el punto de vista numérico, la consideración de modelos constitutivos viscoplásticos.

**APENDICE
Y
BIBLIOGRAFIA**

APENDICE

ANALOGIA CON EL PROBLEMA DE FLEXION EN VIGAS

A fin de facilitar el análisis de la influencia de los parámetros geométricos en el mecanismo de falla del problema en estudio se realiza la analogía del mismo con el problema de flexión en vigas. Para ello se estudiaron vigas de luz ($l=2e$) igual al diámetro del anillo reactivo y altura igual a la profundidad del perno (l_d) a través del análisis elástico lineal en estado plano de tensiones. Se sometieron las mismas a una carga equivalente a la de extracción del perno en el centro de la luz de 120 kN.

A continuación se indica la geometría de las vigas analizadas y el modelo con el cual se puede establecer la analogía

- ✓ VIGA 1: $l=2e=600$ mm; $h=l_d=150$ mm, no se correlaciona con ningún modelo. Su análisis permite corroborar la influencia de los parámetros geométricos en estudio.
- ✓ VIGA 2: $l=2e=450$ mm; $h=l_d=150$ mm, se correlaciona con Modelos 2 y 4 analizados.
- ✓ VIGA 3: $l=2e=300$ mm; $h=l_d=150$ mm, se correlaciona con Modelos 1 y 3 analizados.
- ✓ VIGA 4: $l=2e=150$ mm; $h=l_d=150$ mm, se correlaciona con Modelos 5 analizados.

Las geometrías indicadas conducen a relaciones luz/altura de viga de 4, 3, 2 y 1. Dicha variación permite el análisis considerando la influencia de la esbeltez en la distribución de tensiones principales que como se sabe es de importancia. De acuerdo a Leonhardt (1973) en las aplicaciones prácticas la distribución de

tensiones en vigas de esbelteces $l/d \leq 2$ varía considerablemente respecto de las distribuciones en vigas de esbelteces superiores a 2.

En las Figuras A-1 a A-8 se indican las distribuciones de tensiones principales máximas y mínimas para las 4 vigas analizadas, en las cuales puede observarse como las tensiones de compresión y de tracción disminuyen de viga 1 a viga 2 como es de esperar en vigas flexionadas al disminuir la luz de las mismas. Por otro lado se observa cómo se produce incremento en las tensiones máximas y mínimas con la disminución de luces en vigas 3 y 4. Ello se explica pues estas vigas tienen esbelteces menores o iguales a 2 lo que hace que trabajen como vigas de gran altura.

En Figuras A-1 a A-8 se puede observar cómo las curvas de iguales tensiones de tracción se van aplanando en la medida que se disminuye la esbeltez, lo que es indicativo de la verticalización de la fisura con la disminución de la misma. Asimismo se puede observar una sollicitación localizada muy elevada en la zona de los apoyos tanto de tracción como de compresión

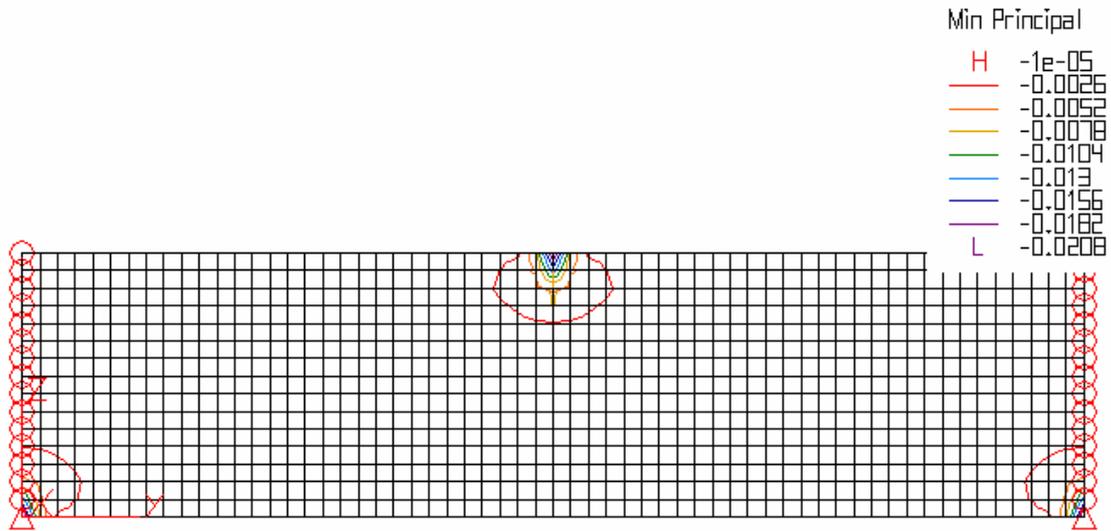


Figura A-1: Distribución de tensiones Mínimas Principales en Viga 1 correspondiente a esbeltez $l/d=4$

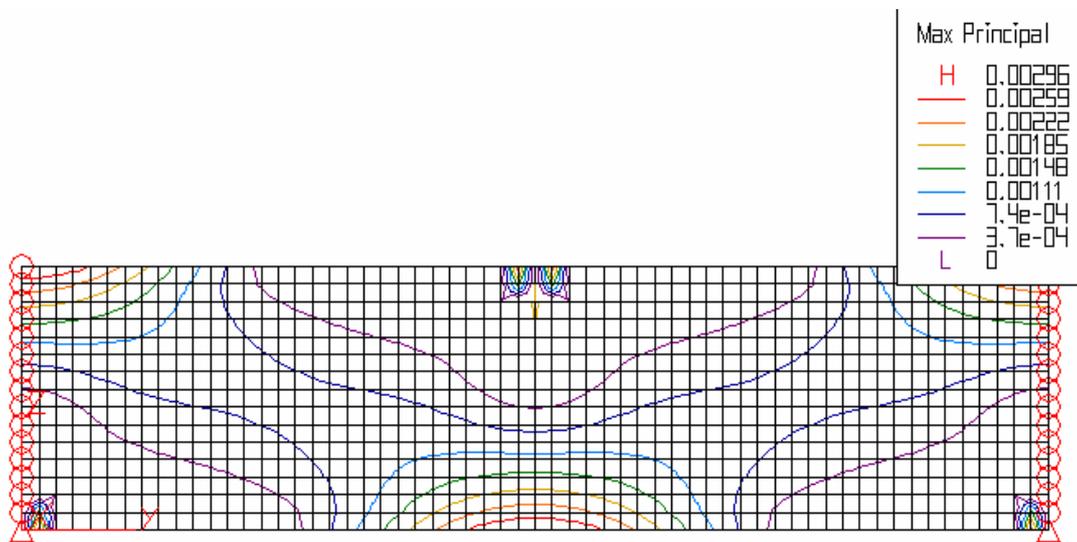


Figura A-2: Distribución de Tensiones Máximas Principales en Viga 1 correspondiente a esbeltez $l/d=4$

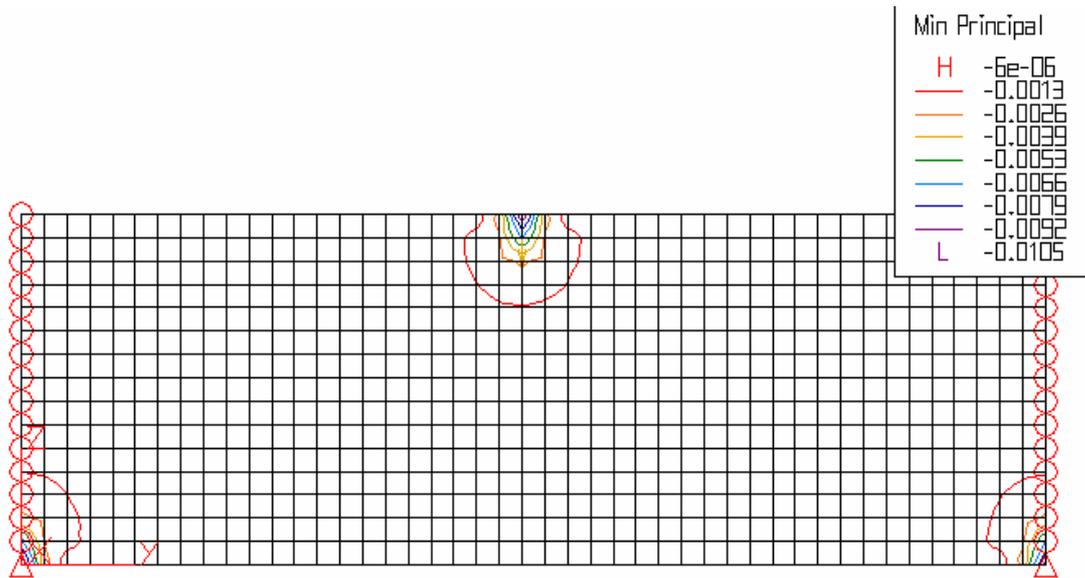


Figura A-3: Distribución de Tensiones Mínimas Principales en Viga 2 correspondiente a esbeltez $l/d=3$

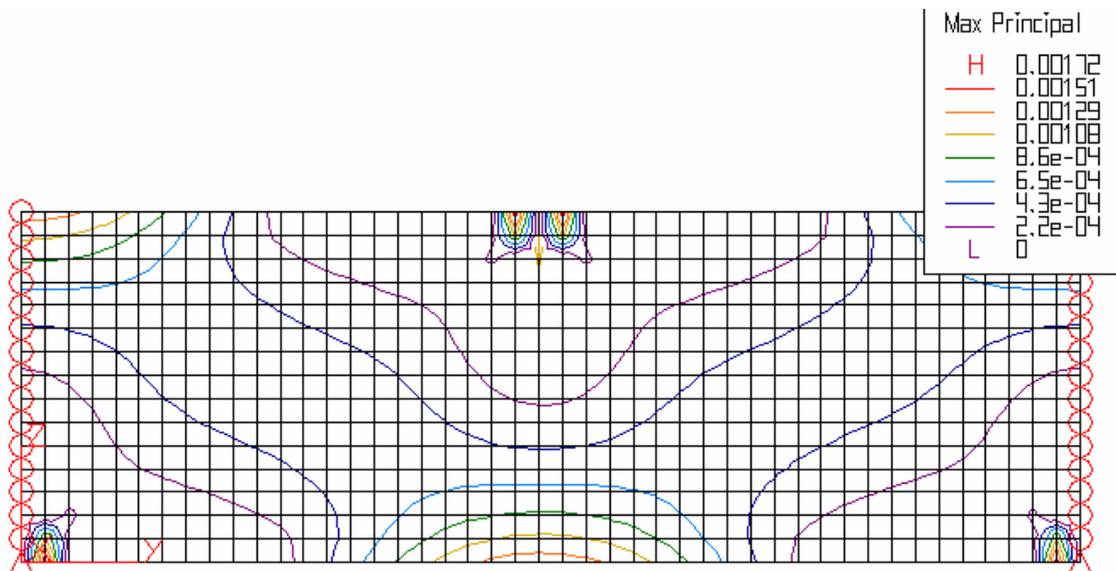


Figura A-4: Distribución de Tensiones Máximas Principales en Viga 2 correspondiente a esbeltez $l/d=3$

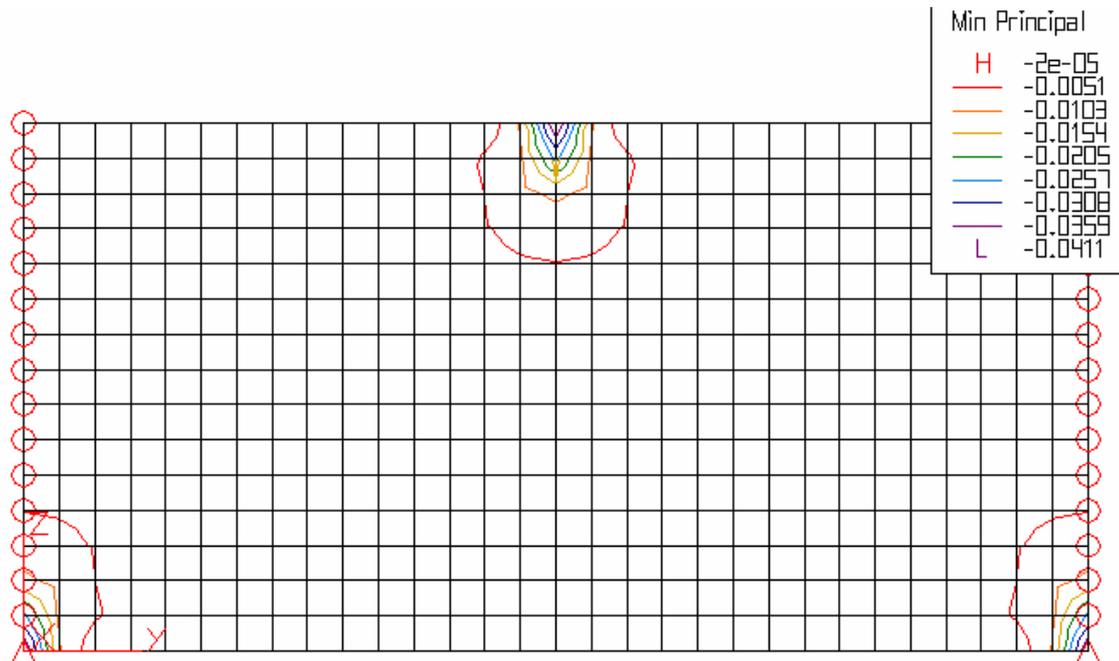


Figura A-5: Distribución de Tensiones Mínimas Principales en Viga 3 correspondiente a esbeltez $l/d=2$

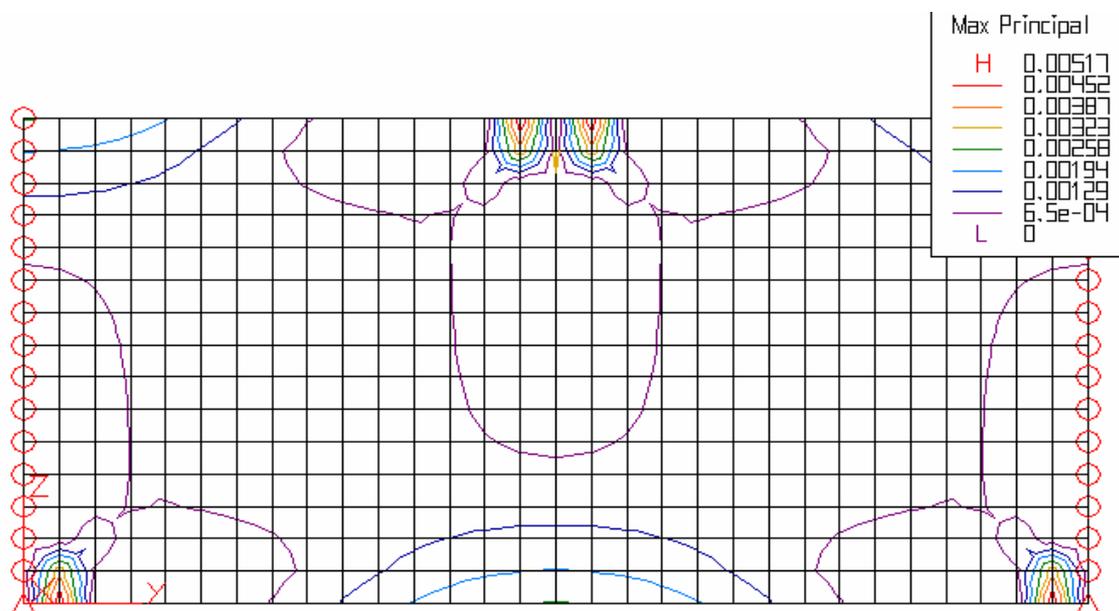


Figura A-6: Distribución de Tensiones Máximas Principales en Viga 3 correspondiente a esbeltez $l/d=2$

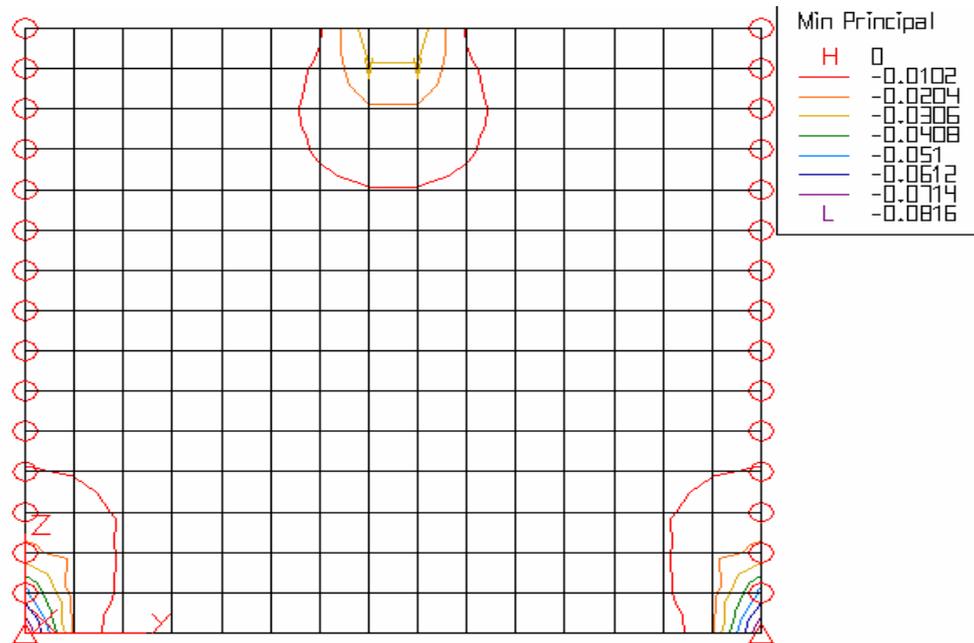


Figura A-7: Distribución de Tensiones Mínimas Principales en Viga 4 correspondiente a esbeltez $l/d=1$

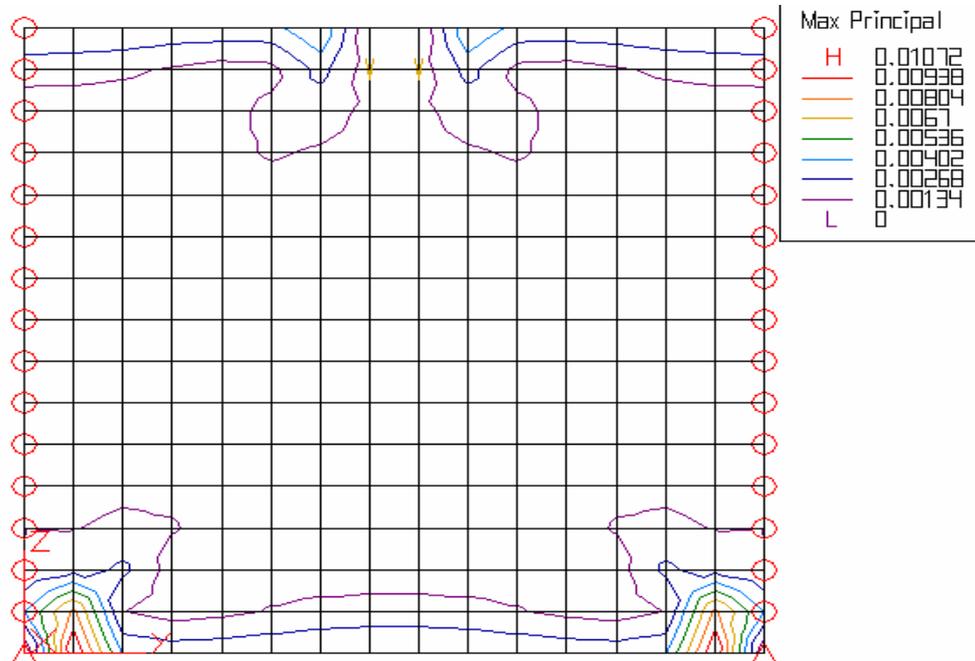


Figura A-8: Distribución de Tensiones Máximas Principales en Viga 4 correspondiente a esbeltez $l/d=1$

BIBLIOGRAFIA

- ✓ ACI 228.1R-89 (1991) "In-Place Methods for Determination of Strength of Concrete". ACI Manual of Concrete Practice-Part 2.
- ✓ ACI 349.2R-89 (1991) "Embedment Desing Examples". ACI Manual of Concrete Practice-Part 4.
- ✓ ACI 349-90 (1991) "Code Requirements for Nuclear Safety Related Concrete Structures". ACI Manual of Concrete Practice- Part 4.
- ✓ ACI 349R-90 (1991) "Commentary on Code Requirements for Nuclear Safety Related Concrete Structures" (ACI 349-90). ACI Manual of Concrete Practice-Part 4.
- ✓ ACI COMMITTEE 349 (1985) "Code Requirements For Nuclear Safety Related Concrete Structures" ACI 349-85 and Commentary ACI 349 R-85. ACI Manual of Concrete Practice- Part 4.
- ✓ ACI COMMITTEE 355 (1991) "Anchors in Concrete- Desing and Behavior", reporte. SP-130
- ✓ ALGOR SOFTWARE. Versión 2000 y sus correspondientes manuales. Pittsburgh. USA
- ✓ ASTM C 900 (1993) "Standard Test Method for Pullout strength of hardened concrete"
- ✓ BALOGH T., KOVÁCSHÁZY G. AND FRIGY A. (1991): "Pull-Out Tests on Steel Embedments in Concrete". En Anchors in Concrete- Desing and Behavior, reporte de ACI Committee 355, SP-130, pág. 221-233.
- ✓ BARR, TOKATLY, (1991) "Experimental Study of the Pullout Test", RILEM TC-90 FMA, FRACTURE MECHANICS OF CONCRETE-APPLICATIONS, Cap. 7. Preliminary Report, 2nd ed. By L. Elfgren, Lulea University of Technology, Suecia.
- ✓ CANNON, R. (1995): "Straight Talk About Anchorage to Concrete" Part I- ACI Structural Journal 92, pág 580-586.

- ✓ CANNON, R. (1995): "Straight Talk About Anchorage to Concrete" Part II- ACI Structural Journal 92, pág 724-725.
- ✓ CODE REQUIREMENTS FOR NUCLEAR SAFETY RELATED CONCRETE STRUCTURES (ACI 349-85) and Commentary ACI 349 R-85, by ACI Committee 349, 1985.
- ✓ CONSTANTINE SPYRAKOS (1994) "Finite Element Modeling in Engineering Practice" West Virginia University Press. 1994
- ✓ CONSTANTINE SPYRAKOS, JOHN RAFTOYIANNIS (1997) "Linear and non linear finite element analysis in engineering practice" Algor, Inc. Publishing División Pittsburgh, PA 1997
- ✓ CRISFIELD M. (1991), "Non Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures", Ed. John Wiley & Sons Ltd.
- ✓ DELIBES LINIERS A., GONZALEZ ISABEL G. (1985) "Determinación de la Adherencia de la Armadura de Pequeño Diámetro. Nuevo Método RILEM de Ensayo de Arrancamiento: Pullout Test" Revista Hormigón y Acero N° 155 2º trimestre, pág. 125-136.
- ✓ DESAI, CHANDRAKANT S.-SIRIWARDANE, HEMA J (1984) "Constitutive Laws For Engineering Materials" With Emphasis on Geologic Materials. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J.
- ✓ DI MAIO, INCA, GIACCIO ZERBINO (2000) "Aplicación del Ensayo Break-Off y el de Torsión en el Seguimiento de la Evolución de la Resistencia a Compresión" Revista Hormigón N° 36, pág. 45-52.
- ✓ ELFGREN L, JOHANSSON H, BROMS C., REHNSTROM A. (1980) " Anchors Bolts in Reinforced Concrete Foundations" Short Time Test. University of Lulea.
- ✓ ELIGEHAUSEN R., (1991): "Behavior, Design and Testing of Anchors in Cracked Concrete". En Anchors in Concrete-Design and Behavior, reporte de ACI Committee 355, SP 130-5, pág. 123-176.
- ✓ ETSE G., (1998) "Finite element analysis of failure response behavior of anchor bolts in concrete" Nuclear Engineering and Design 179. Pág. 249-252
- ✓ ETSE & WILLAM (1994) "Fracture Energy Formulation for Inelastic Behavior of Plain Concrete" Journal of Engineering Mechanics. ASCE Vol. 120, No. 9, pág.1983-2011

- ✓ ETSE G., DANESI R. (1992): "Predicción numérica del Comportamiento de Falla de Ensayos de Extracción". Memorias XII Jornadas Argentinas de Ingeniería Estructural, Bs.As., Argentina, pág. 100-108.
- ✓ ETSE G., DANESI R. (1994): "Análisis numérico del comportamiento de falla de pernos anclados en hormigón". Memorias XIV Jornadas Argentinas de Ingeniería Estructural, pág. 169-180.
- ✓ ETSE G., SFER D., CAROL I., GETTU, R. (2000) "Failure Analysis of Concrete Under Multiaxial Stress State" ECCOMAS 2000 Barcelona-España.
- ✓ ETSE, G. & WILLAM, K. (1996), Integration Algorithms for Concrete Plasticity, Engineering Computation, Vol. 22, pág. 1121-1138.
- ✓ FARROW B., FRIGUI I. AND KLINGNER R. (1996): "Tensile Capacity of Single Anchors in Concrete: Evaluation of Existing Formulas on an LRFD Basis" . ACI Structural Journal 93, pág. 128-137.
- ✓ FUNG Y. C. (1965), "Foundations of Solid Mechanics" Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs.
- ✓ FURCHE J. AND ELIGEHAUSEN (1991), "Lateral Blow-Out Failure of Headed Studs Near a Free Edge". En Anchors in Concrete-Design and Behavior, SP-130-10 reporte de ACI Committee 355, pág. 235-262.
- ✓ HILL, R. (1950) "The Mathematical Theory of Plasticity", Oxford University Press, London.
- ✓ HOMAYOUN H. ABRISHAMI AND MITCHELL (1996): "Analysis of Bond Stress Distributions in Pullout Specimens". Journal of Structural Engineering, ASCE, Marzo 1996, pág. 255-261.
- ✓ HUGHES T. (1987) "The Finite Element Method" Prentice-Hall
- ✓ KIERKEGAARD-HANSEN, P. (1975) "Lok-Strength" En Nordisk Beton, Vol. 19, pág. 325-336.
- ✓ KLAUS-JÜRGEN BATHE (1982): "Finite Element Procedures in Engineering Analysis " Editorial prentice-hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey
- ✓ KOTSOVOS, M.D. AND NEWMAN, J.B.(1978): "Generalized Stress Strain Relations for Concrete" Journal of Engineering Mechanics, ASCE, V104, N°4, pág. 845-856

- ✓ LUBLINER J., (1990) "Plasticity Theory" Macmillan Publishing Company -New York. Collier Macmillan Publishers-London.
- ✓ MALVERN L. E. (1969): "Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium" Editorial Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J.
- ✓ MASE (1977): "Mecánica del Medio Continuo" Teoría y problemas resueltos. Editorial McGraw-Hill México.
- ✓ MC VAY, COOK AND KRISHNAMURTHY (1996): "Pullout Simulation of Postintalled Chemically Bonded Anchors" Journal of Structural Engineering, ASCE, pág. 1016-1024.
- ✓ NAFEMS (1992), "Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis", Ed. E. Hinton.
- ✓ RILEM TC-90 FMA (1991) Fracture Mechanics of Concrete-Applications. Preliminary Report-. "Round-Robin Analysis of Anchor Bolts". Ed. By Elfgrén, Lulea University of Technology, Suecia.
- ✓ RUNESSON, STURE & WILLAM (1988), Integration in Computational Plasticity, Computers & Structures, Vol. 30, pág. 119-130.
- ✓ SFER, ETSE, DANESI (1998) "Estudio Experimental de la fractura de hormigón bajo estados triaxiales" XVI Jornadas de Ingeniería Estructural, AIE, Bs. As., Argentina.
- ✓ SIMO & TAYLOR (1985), Consistent Tangent Operators for Rate-Independent Elastoplasticity, Compt. Method appl. Mech. Eng., Vol. 48, pág. 101-118.
- ✓ SKRAMATAJEV B. (1938) "Determining Concrete Strength for Control of Concrete in Structures". ACI Journal, Vol. 34, pág. 285-304.
- ✓ WALTHER, SUTTON AND MEINHEIT, (1991) "Evaluation of Expansion Anchor Ultimate Tensile Capacity Prediction Equations" Anchors in Concrete-Design and Behavior SP 130-2, reporte de ACI Committee 355.
- ✓ WIEVEL (1991) "Design Guidelines for Anchorage to Concrete" Anchors in Concrete-Design and Behavior SP 130-1, reporte de ACI Committee 355
- ✓ ZIENKIEWICZ (1982), "El Método de los Elementos Finitos" Editorial Reverté, S. A.
- ✓ ZIENKIEWICZ O. & TAYLOR R. (1994) "El Método de los Elementos Finitos" Vol. 1 y 2. Mac Graw Hill- Cimne