Trigonometría – Triángulos rectángulos y oblicuángulos - Funciones trigonométricas

El origen de la *Trigonometría* se debe a los indios y egipcios; pero los verdaderos impulsores fueron los árabes que por razones religiosas se les plantearon problemas de orientación y determinación de fechas y horas, perfeccionando aspectos astronómicos y con ello la Trigonometría, fueron quienes la divulgaron en la Edad Media. Hiparco (s.II a.C) se considera el padre de la Trigonometría. Menelao (s.I) y Ptolomeo (s.II) continuaron su estudio.

La agrimensura y la navegación son prácticas que, desde sus orígenes, han requerido el cálculo de distancias cuya medición directa no resultaba posible; y otro tanto sucede en el ámbito de la astronomía. Para resolver este problema, los antiguos babilonios recurrieron a la trigonometría; es decir, a una serie de procedimientos que permiten poner en relación las medidas de los lados de un triángulo con las medidas de sus ángulos. La distancia desde un punto situado al pie de una montaña hasta su cima, por ejemplo, o desde una embarcación hasta un determinado punto de la costa, o la que separa dos astros, pueden resultar inaccesibles a la medición directa; en cambio, el ángulo que forma la visual dirigida a un accidente geográfico, o a un punto de la bóveda celeste, con otra visual fijada de antemano (como puede ser la dirigida según la horizontal), acostumbra ser fácil de medir mediante instrumentos relativamente sencillos.

El objetivo de la *trigonometría* es establecer las relaciones matemáticas entre las medidas de las longitudes de los segmentos que forman los lados de un triángulo con las medidas de las amplitudes de sus ángulos, de manera que resulte posible calcular las unas mediante las otras. Dicho de otro modo, la *trigonometría* es la rama de la matemática que estudia los problemas relativos a la medida de los elementos de los triángulos estableciendo una correspondencia entre las magnitudes susceptibles de medición lineal y las angulares mediante la introducción de las razones trigonométricas.

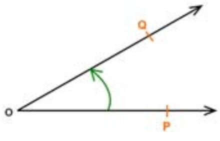
Funciones trigonométricas

Ángulos en el plano

Considerando en el plano un punto O y dos semirrectas con origen en ese punto. Con ellas queda determinado un ángulo que es un trozo de plano comprendido entre las dos semirrectas. Se llama *ángulo orientado* $P\hat{O}Q$, al ángulo generado por la rotación en sentido antihorario de la semirrecta OP hacia la posición de la semirrecta OQ.

La semirrecta OP se denomina lado inicial y la semirrecta OQ lado terminal del ángulo.

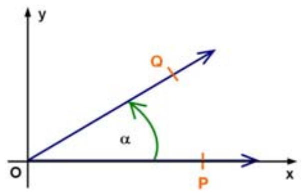
POR CONVENCIÓN: se considera positivo al giro en sentido contrario a las agujas del reloj, entonces se dice que el ángulo $P\hat{O}Q$ es un ángulo orientado en sentido positivo y OP es la semirrecta inicial de $P\hat{O}Q$



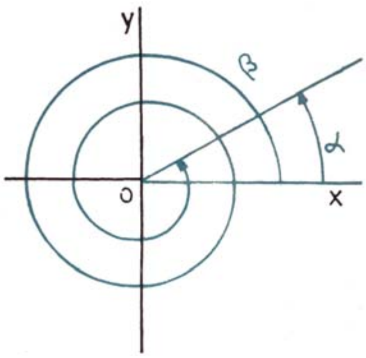
Ángulos centrados (en posición normal)

Considerando un plano con coordenadas cartesianas, x e y y de centro O, origen de coordenadas (0;0)

En estas condiciones se llama *ángulo centrado* $P\hat{O}Q$ o *está en posición normal* a todo ángulo orientado cuyo vértice es el origen de coordenadas y cuya semirrecta inicial coincida con el semieje positivo de abscisas.



Ángulos congruentes



Los ángulos que tienen sus lados coincidentes, sin embargo, dichos ángulos NO son iguales, DIFIEREN en un número entero de giros completos, se llaman *ángulos congruentes*.

$$\hat{\beta} = \hat{\alpha} + k \text{ giros} = \hat{\alpha} + k.360^{o} = \hat{\alpha} + k.2\pi$$

Lo mismo para los ángulos orientados en sentido negativo.

Sistemas de medición de los ángulos

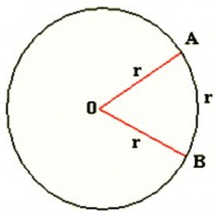
Los ángulos se expresan en grados sexagesimales, grados centesimales o en radianes.

En el **sistema sexagesimal** se considera a la circunferencia dividida en 360 partes iguales; y un ángulo de 1° sexagesimal es la medida de aquel que se genera cuando el giro, en el mismo sentido de las agujas del reloj, del lado terminal es de 1/360 parte de una vuelta completa. Cada grado se considera dividido en 60 partes iguales llamadas minutos y cada minuto en 60 partes iguales llamadas segundos. Los símbolos para estas unidades son:

grado ° minuto ' segundo ''

Radián: Unidad de ángulo plano en el Sistema Internacional de Unidades. Es el ángulo que subtiende un arco cuya longitud es igual al radio del arco.

Radián se denota con la abreviatura *rad*.



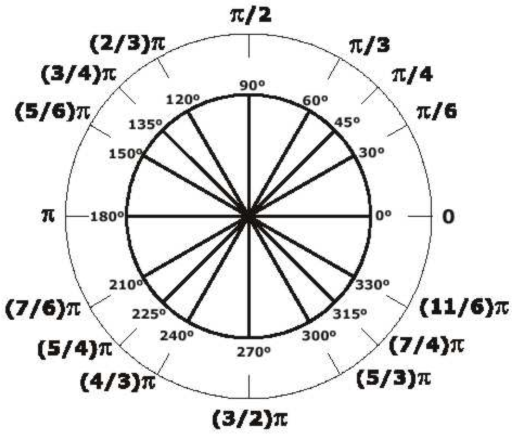
$$1\,\text{rad} = \frac{360^{o}}{2\pi} = \frac{180^{o}}{\pi} \cong 57^{o}\,17'\,45''$$

$$1^{o} = \frac{2\pi}{360}\,\text{rad} = \frac{\pi}{180}\,\text{rad} \cong 0{,}01745\ \text{rad}$$

Equivalencia de un ángulo en el sistema sexagesimal y en el sistema circular

Para medir los ángulos, los sistemas más utilizados son el sexagesimal y el circular. Es conveniente saber convertir un ángulo dado de un sistema a otro.

$$\frac{\pi \text{ rad}}{180^{o}} = \frac{x\,(\text{ángulo medido en radianes})}{s\,(\text{ángulo medido en grados})}$$



Algo para recordar...

En el sistema circular se utiliza como unidad de medida el "radián".

Atención!!

Aquí aparece lo más importante del uso de este sistema:

la medida de un ángulo en unidades de radio: **¡¡es un número real!!**

Con esto hemos logrado un **conjunto numérico que representa la medida de los ángulos**.

Todavía podemos asegurar más. Este conjunto numérico es el **conjunto de los números reales R**.

Si pusiéramos en duda que los números irracionales pudieran ser medida de algún ángulo, nos ayudará familiarizarnos con los **ángulos cuadrantales,** y comprobar que, por ejemplo, la longitud del arco correspondiente a una semicircunferencia es π = 3,14159... , un número irracional.

La ventaja de trabajar con el sistema circular, además de que se trabaja con números reales como se dijo anteriormente, es que en la mayoría de las aplicaciones se analizan procesos a través del **tiempo** y **esa variable es un número real**. Por ejemplo, la transmisión del sonido, el movimiento de los planetas o la corriente alterna.

➡ Ejemplos:

1.- Calcular la medida equivalente de los siguientes ángulos en radianes.

a) 60º b) 450º c) -75º

a) $x = \dfrac{60^{o}.\pi \text{ rad}}{180^{o}} = \dfrac{\pi}{3} rad \;\;;\;\; 60^{o} = \dfrac{\pi}{3} rad$

b) $x = \dfrac{450^{o}.\pi \text{ rad}}{180^{o}} = \dfrac{5\pi}{2} rad \;\;;\;\; 450^{o} = \dfrac{5\pi}{2} rad$

c) $x = \dfrac{-75^{o}.\pi \text{ rad}}{180^{o}} = -\dfrac{5\pi}{12} rad \;\;;\;\; -75^{o} = -\dfrac{5\pi}{12} rad$

2.- Calcular la medida equivalente de los siguientes ángulos en grados sexagesimales.

a) $\frac{11\pi}{6}\,rad$ b) $-\frac{1}{2}\pi\,\text{rad}$ c) $-2\,rad$

a) $s=\dfrac{\frac{11\pi}{6}\,rad.180^\circ}{\pi\,\text{rad}}=330^\circ$; $\frac{11\pi}{6}\,rad=330^\circ$

b) $s=\dfrac{-\frac{1}{2}\pi\,rad.180^\circ}{\pi\,\text{rad}}=-90^\circ$; $-\frac{1}{2}\pi\,rad=-90^\circ$

c) $s=\dfrac{-2\,rad.180^\circ}{\pi\,\text{rad}}=-114^\circ\,35'$; $-2\,rad=-114^\circ\,35'$

Razones trigonométricas

Debido a que un triángulo tiene tres lados, se pueden establecer seis razones, dos entre cada pareja de estos lados.

Las razones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo son las siguientes:

Seno: razón entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa.

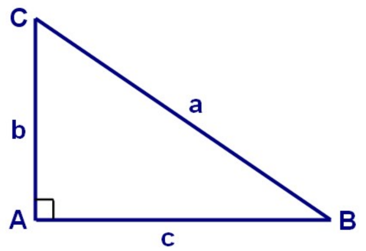
Coseno: razón entre el cateto adyacente al ángulo y la hipotenusa.

Tangente: razón entre el cateto opuesto al ángulo y el cateto adyacente.

Cotangente: razón entre el cateto adyacente al ángulo y el cateto opuesto.

Secante: razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente al ángulo.

Cosecante: razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto al ángulo.



Triángulo ABC, rectángulo en $\hat{A}$

$\hat{B}$ y $\hat{C}$: ángulos agudos

a: hipotenusa

b: cateto opuesto al $\hat{B}$ y adyacente al $\hat{C}$

c: cateto opuesto al $\hat{C}$ y adyacente al $\hat{B}$

Razones trigonométricas para el ángulo $\hat{B}$ y para el ángulo $\hat{C}$ del triángulo de la figura

$sen\,\hat{B}=\dfrac{\text{cateto opuesto}}{hipotenusa}=\dfrac{b}{a}$	$sen\,\hat{C}=\dfrac{\text{cateto opuesto}}{hipotenusa}=\dfrac{c}{a}$
$\cos\hat{B}=\dfrac{\text{cateto adyacente}}{hipotenusa}=\dfrac{c}{a}$	$\cos\hat{C}=\dfrac{\text{cateto adyacente}}{hipotenusa}=\dfrac{b}{a}$
$tg\,\hat{B}=\dfrac{\text{cateto opuesto}}{cateto\text{ adyacente}}=\dfrac{b}{c}$	$tg\,\hat{C}=\dfrac{\text{cateto opuesto}}{cateto\text{ adyacente}}=\dfrac{c}{b}$
$cotg\,\hat{B}=\dfrac{1}{\text{tg}\,\hat{B}}=\dfrac{\text{cateto adyacente}}{cateto\text{ opuesto}}=\dfrac{c}{b}$	$cotg\,\hat{C}=\dfrac{1}{\text{tg}\,\hat{C}}=\dfrac{\text{cateto adyacente}}{cateto\text{ opuesto}}=\dfrac{b}{c}$

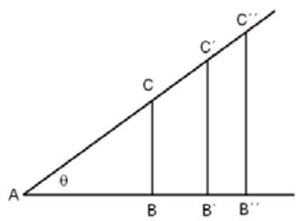
$\sec\hat{B} = \dfrac{1}{\cos\hat{B}} = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\textit{cateto}\ \text{adyacente}} = \dfrac{a}{c}$	$\sec\hat{C} = \dfrac{1}{\cos\hat{C}} = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\textit{cateto}\ \text{adyacente}} = \dfrac{a}{b}$
$\text{cosec}\,\hat{B} = \dfrac{1}{\text{sen}\,\hat{B}} = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\textit{cateto}\ \text{opueto}} = \dfrac{a}{b}$	$\text{cosec}\,\hat{C} = \dfrac{1}{\text{sen}\,\hat{C}} = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\textit{cateto}\ \text{opueto}} = \dfrac{a}{c}$

Observación:

Se han definido las razones trigonométricas para un ángulo a través de la construcción de un triángulo rectángulo. Dado un ángulo agudo, se puede construir un triángulo rectángulo que lo tenga como unos de sus ángulos, pero también pueden construirse muchos triángulos rectángulos que lo tengan.

Recordando el Teorema de Thales:

Si tres o más paralelas son cortadas por dos transversales, la razón de dos segmentos cualesquiera determinados en una de ellas es igual a la razón de los segmentos correspondientes de la otra



Estos triángulos tienen todos los ángulos iguales y, por lo tanto, son semejantes ($BAC \approx B'AC' \approx B''AC''$). Cuando los triángulos son semejantes las proporciones entre sus lados son iguales, es decir:

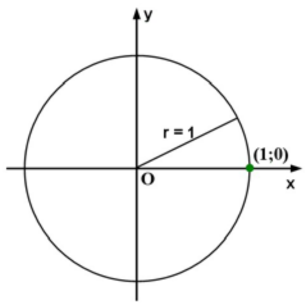
$$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'} = \frac{B''C''}{A''C''} = \text{constante} = \text{sen}\,\theta$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{\overline{AC}}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{\overline{A'C'}}} = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{\overline{A''C''}}} = \textit{cons}\tan\textit{te} = \cos\theta$$

Importante!!

Las razones Trigonométricas no dependen de la medida de los lados, dependen del ángulo

Circunferencia trigonométrica

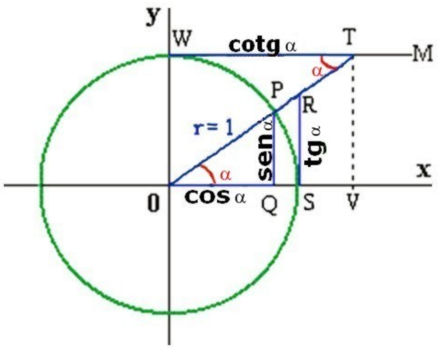


Definición:

Se llama circunferencia trigonométrica o goniométrica si y solo sí su centro es el punto origen del sistema de coordenadas cartesianas, su radio unitario, siendo el punto origen de los arcos el punto de intersección de esa circunferencia con el semieje positivo de las abscisas

Líneas trigonométricas

Las razones trigonométricas deducidas en una circunferencia goniométrica (de radio unitario) se corresponden con los valores de ciertos segmentos de recta que se denominan *líneas trigonométricas*. A continuación se muestran las líneas trigonométricas en el primer cuadrante. La forma de obtener las líneas trigonométricas en los otros tres cuadrantes es similar.



Los triángulos OQP, OSR, TWO y OVT son semejantes, los cuatro son rectángulos y tienen un ángulo agudo en común (por lo tanto, también el tercero). La consecuencia de esto es que las razones entre dos de los lados de uno cualquiera de los triángulos, es igual a la razón entre los lados homólogos en los otros triángulos.

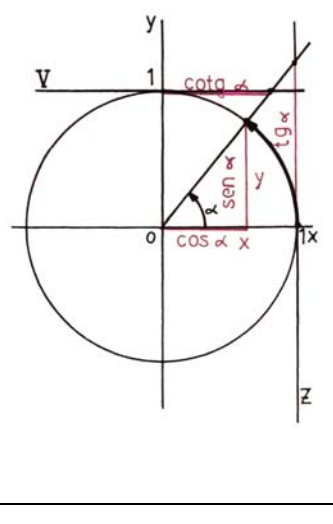
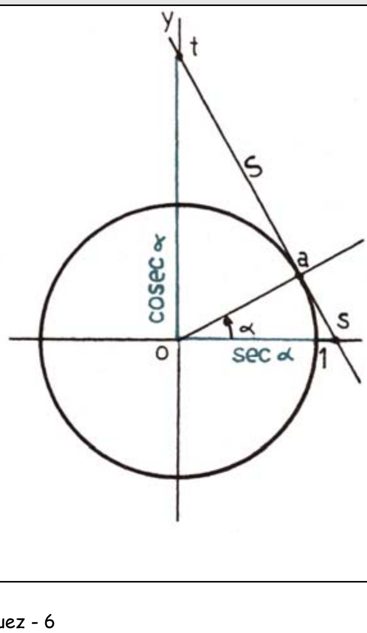
Teniendo en cuenta esto y que el radio del círculo es 1, se deducen las seis líneas trigonométricas.

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{PQ}}{1} = \overline{PQ} \qquad \cos\alpha = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OQ}}{1} = \overline{OQ}$$

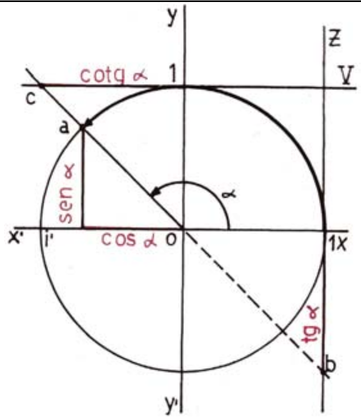
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{RS}}{\overline{OS}} = \frac{\overline{RS}}{r} = \frac{\overline{RS}}{1} = \overline{RS} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\overline{OQ}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{OV}}{\overline{TV}} = \frac{\overline{WT}}{\overline{OW}} = \frac{\overline{WT}}{r} = \frac{\overline{WT}}{1} = \overline{WT}$$

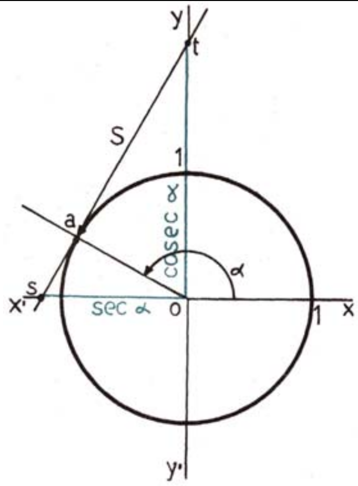
$$\sec\alpha = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OR}}{r} = \frac{\overline{OR}}{1} = \overline{OR} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{\overline{OP}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{OT}}{r} = \frac{\overline{OT}}{1} = \overline{OT}$$

Líneas trigonométricas en cada cuadrante

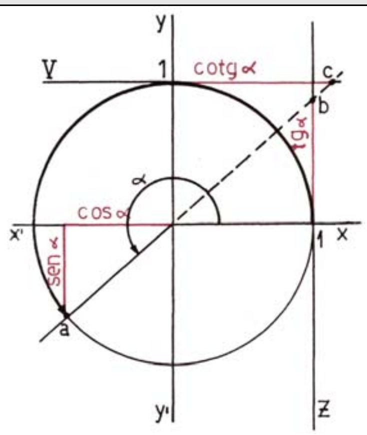
I CUADRANTE	
	

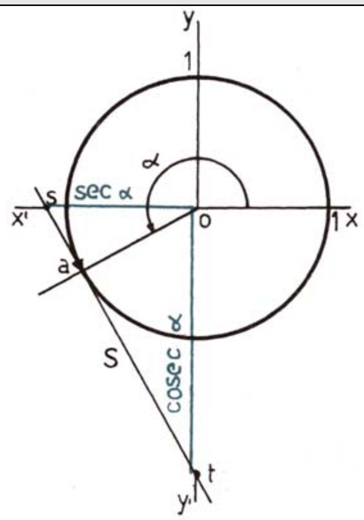
I I CUADRANTE



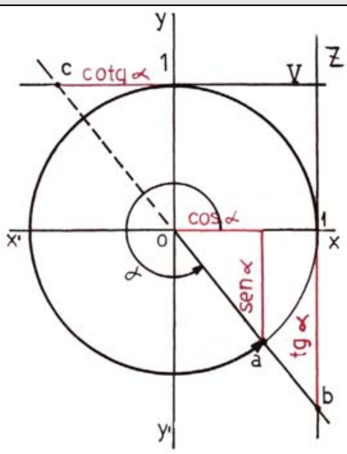


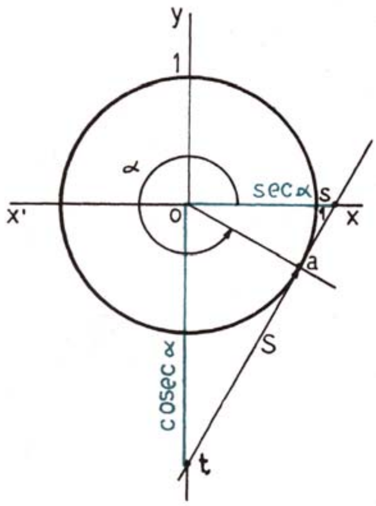
I I I CUADRANTE





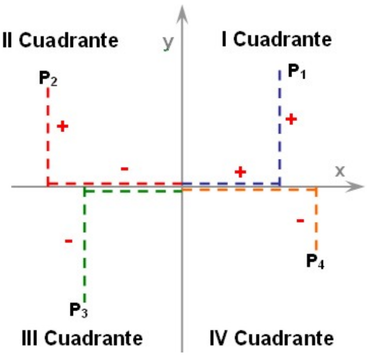
I V CUADRANTE





Signos de las funciones trigonométricas según el cuadrante

De acuerdo con el cuadrante en que se halle el lado terminal del ángulo y teniendo en cuenta que la distancia de un punto cualquiera al origen de coordenadas es siempre positiva, y aplicando la "ley de los signos", las funciones trigonométricas pueden ser positivas o negativas.
En la tabla de la parte inferior se resumen los signos de las funciones trigonométricas en cada uno de los cuadrantes.



	seno	coseno	tangente	cotangente	secante	cosecante
I	+	+	+	+	+	+
II	+	-	-	-	-	+
III	-	-	+	+	-	-
IV	-	+	-	-	+	-

Deducción de los valores de las funciones trigonométricas por arcos notables

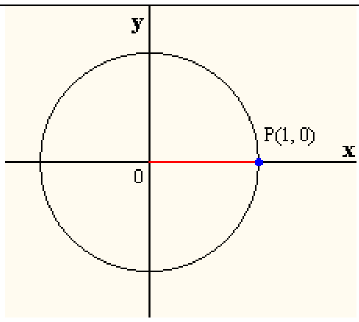
$\alpha = 0$

En este caso las coordenadas de *P* son

$x = 1$ e $y = 0$; y las funciones se deducen a partir de su definición.

$\therefore \quad x = 1 = \cos 0 \;\; y \;\; y = 0 = \operatorname{sen} 0$

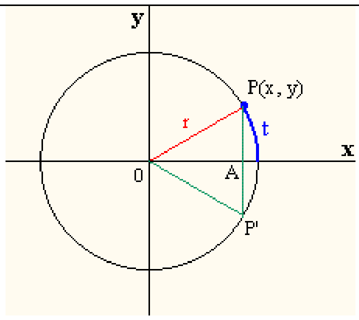
La cotangente y la cosecante no están definidas para $\alpha = 0$ (la división por 0 no existe).



$\alpha = \frac{\pi}{6}$

$$Supuestos: \begin{cases} O\hat{P}P' = \frac{\pi}{3} \\ OA \text{ bisec a a } P\hat{O}P' \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{6}$



Como el $\triangle POP'$ isósceles tiene $\overline{OP} = \overline{OP'} = r$

Los ángulos $O\hat{P}P' = O\hat{P}'P = \pi/3 = 60^o$

Se tiene que:

$\triangle POP'$: equilátero

$$1^2 = OA^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$OA = x = \sqrt{1 - \frac{1}{4}}$$

Segmento $PP' = r = 1$

$\therefore \quad AP = y = \dfrac{1}{2} = sen\,\dfrac{\pi}{6}$

$\therefore \quad x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{6}$

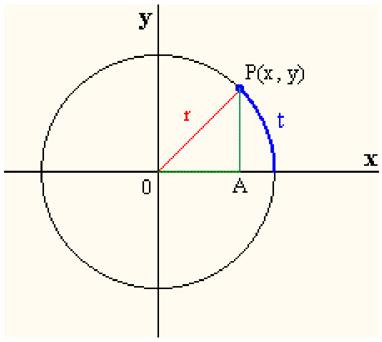
$\alpha = \dfrac{\pi}{4}$

Proyectando el punto P sobre el eje x, se tiene el triángulo isósceles $\triangle OAP$, con los segmentos $OA = AP$, esto es, con $x = y$ (las coordenadas de P son iguales). Como

$x^2 + y^2 = 1$ (T. de Pitágoras en la circunferencia unitaria)

$2x^2 = 1$

$\therefore \quad x = y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = sen\,\dfrac{\pi}{4} = \cos\dfrac{\pi}{4}$



$\alpha = \dfrac{\pi}{3}$

En el $\triangle POB$ es isósceles,

Los lados $OP = OB = r$

$\therefore$ los ángulos $O\hat{P}B = O\hat{B}P$

$P\hat{O}B = 60^\circ$ (arco $PB = \pi/3$)

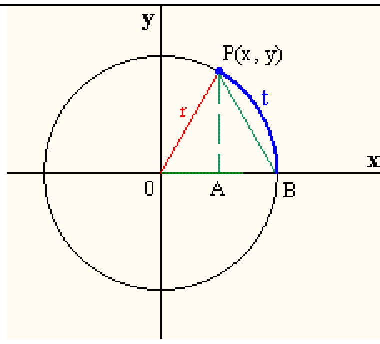
$O\hat{P}B = O\hat{B}P = P\hat{O}B$

$\therefore \quad \triangle OPB$ es equilátero

El segmento AP es la altura del $\triangle OPB$;

AP biseca a $OB = r = 1$;

$\therefore \quad OA = x = \dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3}$



$$r^2 = 1^2 = AP^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$AP = y = \sqrt{1 - \frac{1}{4}}$$

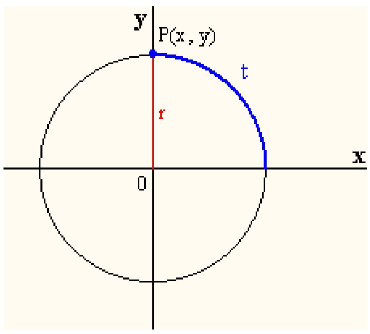
$$\therefore \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2} = sen\,\frac{\pi}{3}$$

$\alpha = \dfrac{\pi}{2}$

Aquí, las coordenadas de *P* son $x = 0$ e $y = 1$. Las funciones se deducen a partir de su respectiva definición.

$\therefore \quad \mathrm{x} = 0 = \cos\dfrac{\pi}{2}$ y $\mathrm{y} = 1 = \mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{2}$

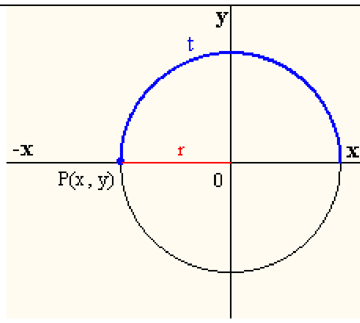
En este caso, la tangente y la secante no están definidas, tienen denominador *x*, y la división por 0 no existe.



$\alpha = \pi$

Como *P* está en el segundo cuadrante,
x = -1, *y* = 0; y las funciones se deducen a partir de sus definiciones respectivas.

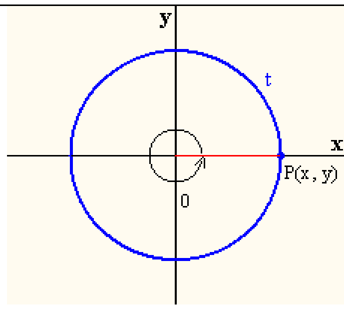
$\therefore \quad x = -1 = \cos\pi \ \text{ y } \ y = 0 = \operatorname{sen}\pi$



$\alpha = 2\pi$

Al realizar un giro completo, *P* se encuentra en el punto de partida y las funciones coinciden con las de $\alpha = 0$.

$\therefore \quad \cos(2\pi) = \cos 0 = 1 \ \text{ y } \ \operatorname{sen}(2\pi) = \operatorname{sen} 0 = 0$



Valores de las funciones trigonométricas para arcos notables

Resumiendo en una tabla lo demostrado más arriba y completando las restantes funciones trigonométricas se tiene el siguiente cuadro de valores para arcos notables

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	2π
sen α	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	0
cos α	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1	1
tg α	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	No existe	0	0
cotg α	No existe	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	No existe	No existe
sec α	1	$2\sqrt{3}/3$	$\sqrt{2}$	2	No existe	-1	1
cosec α	No existe	2	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}/3$	1	No existe	No existe

Variación de las funciones trigonométricas.

La variación de los valores del seno es: $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$

La variación de los valores del coseno es: $-1 \leq \cos x \leq 1$

Relaciones entre los valores de las funciones trigonométricas de un mismo ángulo

Relación Fundamental de la Trigonometría (relación pitagórica de las funciones trigonométricas)

Sea α un ángulo cualquiera en posición normal y sea P(x, y) un punto sobre el lado terminal del ángulo.

Por definición:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{PQ}}{1} = \overline{PQ} \qquad \cos\alpha = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OQ}}{1} = \overline{OQ} \qquad [1]$$

Por Teorema de Pitágoras

$$\overline{PQ}^2 + \overline{OQ}^2 = 1^2$$

$$\overline{PQ}^2 + \overline{OQ}^2 = 1$$

Reemplazando por [1]: $(\operatorname{sen}\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$

Relación Fundamental

$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Otras relaciones entre las funciones trigonométricas de un mismo ángulo son:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha$$

➡ Ejemplo: Sea θ un ángulo del III cuadrante del cual se conoce que $sen\,\theta = -\frac{1}{3}$. Calcular los valores de las restantes funciones trigonométricas de dicho ángulo (sin calcular previamente θ)

Para calcular el coseno de θ:
A partir de la relación pitagórica de las funciones trigonométricas

$$sen^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad ; \quad |\cos\theta| = \sqrt{1 - sen^2\theta} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

Como θ es un ángulo del III cuadrante, $\cos\theta \langle 0$, luego: $\cos\theta = -\frac{\sqrt{8}}{3}$

Para calcular la tangente de θ:

$$tg\,\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{\sqrt{8}}{3}} = -\frac{1}{3}.\left(-\frac{3}{\sqrt{8}}\right) = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{8}}{8}$$

Para calcular la cotangente de θ:

$$\operatorname{cot}g\,\theta = \frac{1}{tg\theta} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{8}}} = 1.\frac{\sqrt{8}}{1} = \sqrt{8}$$

Para calcular la secante de θ:

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{8}}{3}} = -\frac{3}{\sqrt{8}} = -\frac{3\sqrt{8}}{8}$$

Para calcular la cosecante de θ:

$$\operatorname{cos}ec\theta = \frac{1}{sen\theta} = \frac{1}{-\frac{1}{3}} = -3$$

Funciones trigonométricas inversas

Si se conoce el valor de la relación trigonométrica ¿es posible conocer el valor del ángulo correspondiente? O sea, si se sabe que sen α = 0,5 entonces ¿se puede saber cuánto vale el ángulo α?

La respuesta es afirmativa: se utilizan las relaciones inversas. Cada relación trigonométrica tiene su inversa. En el ejemplo: α = arc sen 0,5. Si se hace la pregunta ¿cuál es el ángulo cuyo seno es 0,5? La respuesta es 30°. Entonces: arc sen 0,5 = 30°.

En general:

Si $\operatorname{sen}\alpha = b \Rightarrow \alpha = \operatorname{arcsen} b$
Si $\cos\alpha = b \Rightarrow \alpha = \arccos b$
Si $\operatorname{tg}\alpha = b \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} b$

En la calculadora o en algunos textos se utiliza: $\alpha = \operatorname{sen}^{-1} b$.

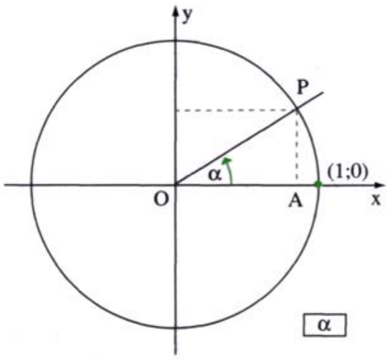
➡ Ejemplo: Si $sen\,\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

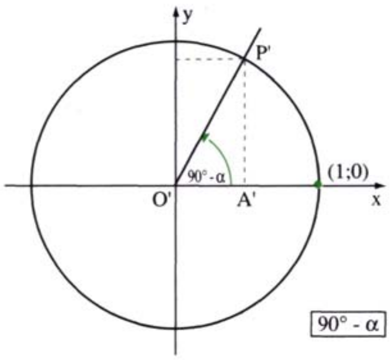
Relaciones entre los valores de las funciones trigonométricas

Ángulos complementarios

Dos ángulos son complementarios porque sumados dan un Recto. Esto es, el complemento de α es $(90º - \alpha)$ o $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

Si α es un ángulo del primer cuadrante, entonces su complemento pertenece al I cuadrante.





Comparando los triángulos

$$OAP \text{ y } O'A'P' \begin{cases} O\hat{A}P = O'\hat{A}'P' = 1R \\ \alpha = A'\hat{P}'O' \quad (\text{ambos tienen el mismo complemento}) \\ \overline{OP} = \overline{O'P'} = 1 \end{cases}$$

Resulta que los triángulos son semejantes: $OAP \cong O'A'P'$

Luego: $\overline{A'P'} = \overline{OA} \Rightarrow$ ordenada de $P' =$ abscisa de $P \Rightarrow \operatorname{sen}(90º\text{-}\alpha) = \cos\alpha$

y $\overline{O'A'} = \overline{AP} \Rightarrow$ abscisa de $P' =$ ordenada de $P \Rightarrow \cos(90º\text{-}\alpha) = sen\,\alpha$

De las dos fórmulas anteriores se pueden deducir los restantes valores de funciones trigonométricas.

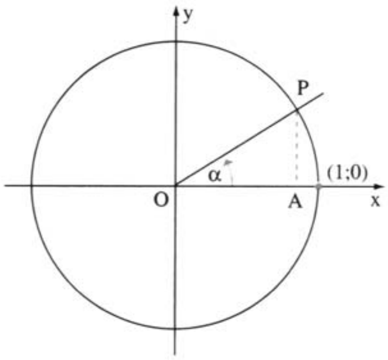
$$\begin{aligned} sen(90º-\alpha) &= \cos\alpha \\ \cos(90º-\alpha) &= sen\ \alpha \\ tg(90º\text{-}\alpha) &= \cot g\ \alpha \\ cotg(90º\text{-}\alpha) &= tg\ \alpha \\ cosec(90º\text{-}\alpha) &= \sec\ \alpha \\ \sec(90º\text{-}\alpha) &= \cos ec\ \alpha \end{aligned}$$

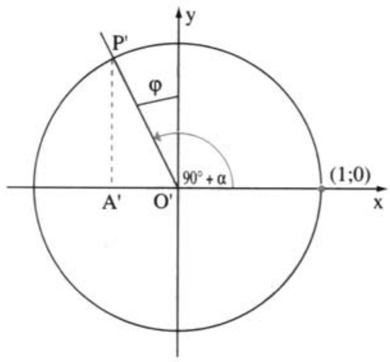
Si dos ángulos son complementarios las funciones de uno son iguales a las cofunciones de su complemento.

Ángulos que difieren en 90° o en π/2

Dos ángulos difieren en 90º si su diferencia es 1 R. Dado un ángulo α en el primer cuadrante, $(90º+\alpha)$ o $\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ difiere en 90º respecto de α.

Si α es un ángulo del primer cuadrante, entonces $(90º+\alpha)$ pertenece al II cuadrante.





Comparando los triángulos

$$OAP \text{ y } O'A'P' \begin{cases} O\hat{A}P = O'\hat{A}'P' = 1R \\ \alpha = A'\hat{P}'O' \quad \left(\varphi = O'\hat{P}'A' \text{ por ser alternos internos y } \varphi = \alpha \Rightarrow \alpha = O'P'A'\right) \\ \overline{OP} = \overline{O'P'} = 1 \end{cases}$$

Resulta que los triángulos son semejantes: OAP ≅ O´A´P´

Luego: $\overline{A'P'} = \overline{OA} \Rightarrow$ ordenada de P´ = abscisa de P $\Rightarrow$ $sen\,(90º+\alpha) = \cos\alpha$

y $\overline{O'A'} = \overline{AP} \Rightarrow$ abscisa de P´ = ordenada de P $\Rightarrow$ $\cos\,(90º+\alpha) = -sen\ \alpha$

De las dos fórmulas anteriores se pueden deducir los restantes valores de funciones trigonométricas.

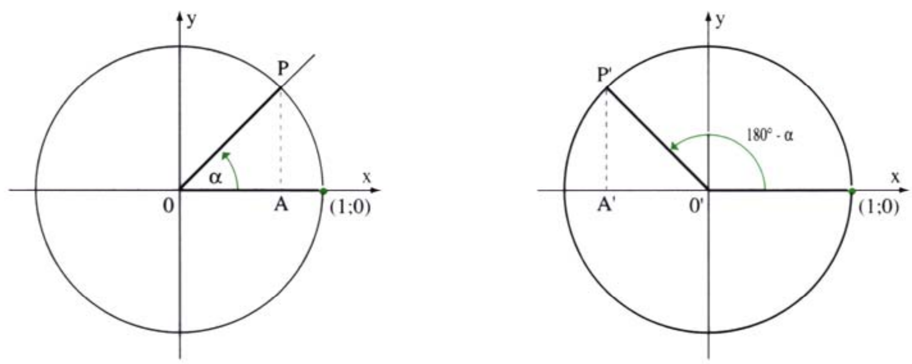
$$\begin{aligned}
&sen\left(90^{o}+\alpha\right)=\cos\alpha\\
&\cos\left(90^{o}+\alpha\right)=-sen\ \alpha\\
&\operatorname{tg}\left(90^{o}+\alpha\right)=-\cot g\ \alpha\\
&\operatorname{cotg}\left(90^{o}+\alpha\right)=-tg\ \alpha\\
&\operatorname{cosec}\left(90^{o}+\alpha\right)=\sec\ \alpha\\
&\sec\left(90^{o}+\alpha\right)=-\cos ec\ \alpha
\end{aligned}$$

Si dos ángulos difieren en $\frac{\pi}{2}$, sus funciones trigonométricas de uno son iguales en valor absoluto a las cofunciones del otro, pero distinto signo, excepto el seno y la cosecante del primero.

Ángulos suplementarios

Dos ángulos son suplementarios porque sumados dan 180º. Esto es, el suplemento de α es $(180^{o}-\alpha)$ o $(\pi-\alpha)$.

Si α es un ángulo del primer cuadrante, entonces su suplemento pertenece al II cuadrante.



Comparando los triángulos

$$OAP \ \text{ y } \ O'A'P' \begin{cases} O\hat{A}P = O'\hat{A}'P' = 1R \\ \alpha = A'\hat{P}'O' \\ \overline{OP} = \overline{O'P'} = 1 \end{cases}$$

Resulta que los triángulos son semejantes: $OAP \cong O'A'P'$

Luego: $\overline{A'P'} = \overline{AP} \Rightarrow$ ordenada de $P' =$ *ordenada* de P $\Rightarrow$ $\operatorname{sen}(180^{o}-\alpha) = sen\ \alpha$

y $\quad \overline{O'A'} = \overline{OA} \Rightarrow$ abscisa de $P' = -$abscisa de P $\Rightarrow$ $\cos(180^{o}-\alpha) = -\cos\alpha$

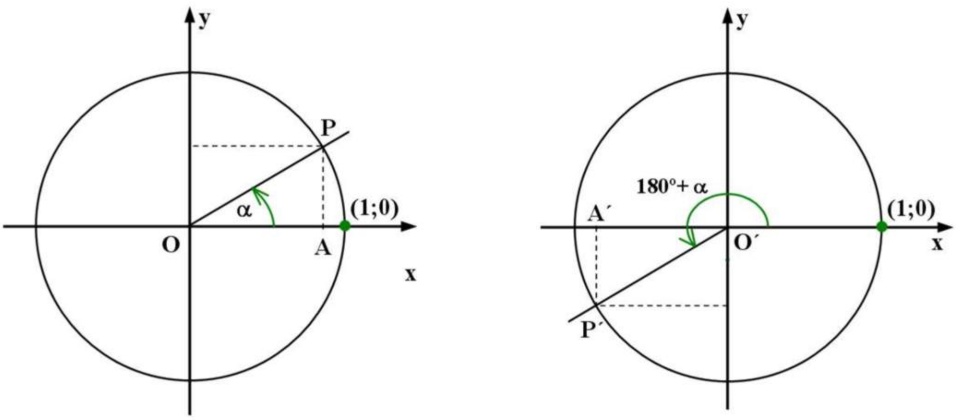
De las dos fórmulas anteriores se pueden deducir los restantes valores de funciones trigonométricas.

$$\begin{aligned}
&sen\,(180º-\alpha) = sen\ \alpha \\
&\cos\,(180º-\alpha) = -\cos\ \alpha \\
&\mathrm{tg}\,(180º\text{-}\alpha) = -\,tg\ \alpha \\
&\mathrm{cotg}\,(180º\text{-}\alpha) = -\,\mathrm{cotg}\ \alpha \\
&\mathrm{cosec}\,(180º\text{-}\alpha) = \mathrm{cosec}\ \alpha \\
&\sec\,(180º\text{-}\alpha) = -\sec\ \alpha
\end{aligned}$$

Si dos ángulos son suplementarios, sus funciones trigonométricas tienen igual valor absoluto pero distinto signo, excepto el seno y la cosecante, que conservan el signo.

Ángulos que difieren en 180° o en π

Dos ángulos difieren en 180º si su diferencia es 2 R. Dado α, $(180º+\alpha)$ o $(\pi+\alpha)$ difiere en 90º con α.
Si α es un ángulo del primer cuadrante, entonces $(180º+\alpha)$pertenece al III cuadrante.



Comparando los triángulos

$$OAP \ \text{ y } \ O´A´P´ \quad \begin{cases} O\hat{A}P = O´\hat{A}´P´ = 1R \\ \alpha = A´\hat{P}´O´ \qquad\qquad \text{(por opuestos por el vértice)} \\ \overline{OP} = \overline{O´P´} = 1 \end{cases}$$

Resulta que los triángulos son semejantes: OAP $\cong$ O´A´P´

Luego: $\overline{A'P'} = \overline{AP} \Rightarrow ordenada\ de\ P' = -ordenada\ de\ P \Rightarrow sen(180º+\alpha) = -sen\,\alpha$

y $\quad \overline{O'A'} = \overline{OA} \Rightarrow abscisa\ de\ P' = -abscisa\ de\ P \Rightarrow \cos(180º+\alpha) = -\cos\,\alpha$

De las dos fórmulas anteriores se pueden deducir los restantes valores de funciones trigonométricas.

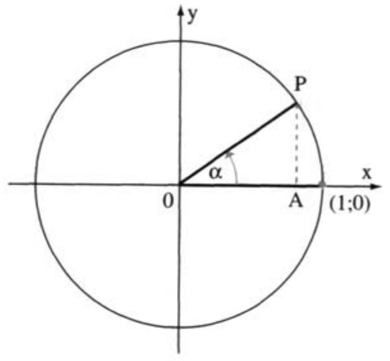
$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}(180^o+\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha\\
&\cos(180^o+\alpha) = -\cos\alpha\\
&\operatorname{tg}(180^o+\alpha) = \operatorname{tg}\alpha\\
&\operatorname{cotg}(180^o+\alpha) = \operatorname{cotg}\alpha\\
&\operatorname{cosec}(180^o+\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha\\
&\sec(180^o+\alpha) = -\sec\alpha
\end{aligned}$$

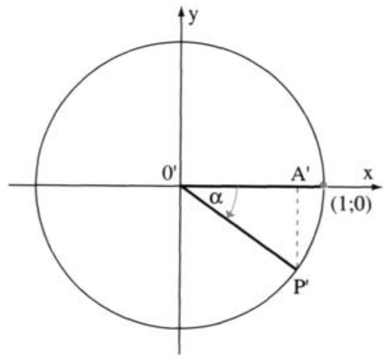
Si dos ángulos difieren en 180°, sus funciones trigonométricas tienen igual valor absoluto pero distinto signo, excepto la tangente y la cotangente, que conservan el signo.

Ángulos opuestos

Dos ángulos son opuestos porque sumados dan 0º. El opuesto de α es $(-\alpha)$.

Si α es un ángulo del primer cuadrante, entonces su opuesto pertenece al IV cuadrante.





Comparando los triángulos

$$OAP \text{ y } O'A'P' \begin{cases} O\hat{A}P = O'\hat{A}'P' = 1R \\ \overline{OP} = \overline{O'P'} \\ P\hat{O}A = P'\hat{O}'A' \end{cases}$$

Resulta que los triángulos son semejantes: $OAP \cong O'A'P'$

Luego: $\overline{A'P'} = \overline{AP} \Rightarrow$ ordenada de $P' = -$ ordenada de $P \Rightarrow \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$

y $\overline{O'A'} = \overline{OA} \Rightarrow$ abscisa de $P' =$ abscisa de $P \Rightarrow \cos(-\alpha) = \cos\alpha$

De las dos fórmulas anteriores se pueden deducir los restantes valores de funciones trigonométricas.

$$\begin{aligned}
&sen\,(-\alpha) = -\,sen\,\alpha \\
&\cos\,(-\alpha) = \cos\,\alpha \\
&tg\,(-\alpha) = -\,tg\,\alpha \\
&cotg\,(-\alpha) = -\,cotg\,\alpha \\
&cosec\,(-\alpha) = -\,cosec\,\alpha \\
&sec\,(-\alpha) = sec\,\alpha
\end{aligned}$$

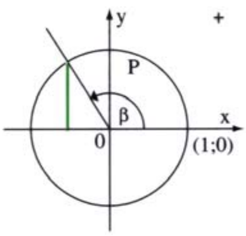
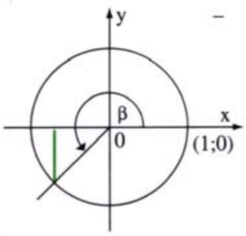
Si dos ángulos son opuestos, sus funciones trigonométricas tienen igual valor absoluto pero distinto signo, excepto el coseno y la secante, que conservan el signo.

En conclusión: Es suficiente conocer las razones trigonométricas de los ángulos del primer cuadrante para determinar las del resto de ángulos.

Reducción al primer cuadrante

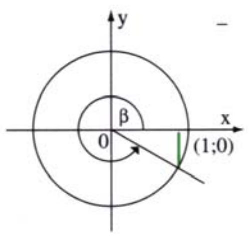
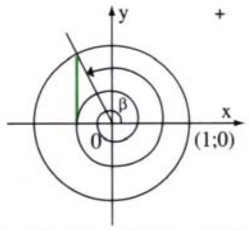
Conociendo los valores de las funciones trigonométricas para ángulos del primer cuadrante, es posible, analizando previamente el signo y utilizando lar relaciones anteriores, obtener los valores que toman dichas funciones para cualquier ángulo. Para tal efecto, se utilizan equivalencias las funciones trigonométricas de (180° - α), (180° + α) y (- α).

Ejemplo: Calcular el **seno de** β

β	signo de sen β	relacionar con	valor de sen β
120°		ángulos suplementarios 120° = 180° - α $\boxed{\alpha = 60°}$	sen 60°
225°		ángulos que difieren en 180° 225° = 180° + α $\boxed{\alpha = 45°}$	- sen 45°

$\boxed{\text{sen } 120° = \text{sen } 60°}$

$\boxed{\text{sen } 225° = \text{-sen } 45°}$

330º		$330° = 360° - \alpha$ $\boxed{\alpha = 30°}$	- sen 30°	$\boxed{\text{sen } 330° = -\text{ sen } 30°}$
840º		primer caso $840° = 2.360° + 120°$	sen 60°	$\boxed{\text{sen } 840° = \text{sen } 60°}$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Son igualdades entre relaciones trigonométricas que se cumplen para cualquier valor de los ángulos que intervienen en la identidad.

A partir de las definiciones de las razones trigonométricas, de las relaciones fundamentales y de las operaciones elementales, se debe lograr una identidad algebraica evidente.

Sugerencia: Aquellas identidades que contengan tangentes, secantes, cosecantes y cotangentes es conveniente escribirlas en función de senos y cosenos.

➨ Ejemplo:

$$(\cos x - sen\ x)^2 = 2 - (sen\ x + \cos x)^2$$

Desarrollando el binomio al cuadrado del 2º miembro

$$(\cos x - \text{sen}x)^2 = 2 - \left(\text{sen}^2 x + 2.\cos x.\text{sen}x + \cos^2 x\right)$$

Utilizando la relación pitagórica de las funciones trigonométricas y la propiedad cancelativa

$$(\cos x - \text{sen}x)^2 = 2 - \text{sen}^2 x - 2.\cos x.\text{sen}\,x - \cos^2 x$$

$$(\cos x - \text{sen}x)^2 = 2 - \left(\text{sen}^2 x + \cos^2 x\right) - 2.\cos x.\text{sen}\,x$$

$$(\cos x - \text{sen}x)^2 = 2 - 1 - 2.\cos x.\text{sen}\,x$$

$$(\cos x - \text{sen}x)^2 = 1 - 2.\cos x.\text{sen}\,x$$

Desarrollando el binomio al cuadrado del 1º miembro

$$\cos^2 x - 2\cos x.\text{sen}\,x + \text{sen}^2 x = 1 - 2.\cos x.\text{sen}\,x$$

$$1 - 2\cos x.\text{sen}\,x = 1 - 2.\cos x.\text{sen}\,x$$

No siempre las identidades se verifican para todo $x \in R$ y es necesario analizar su dominio para hacer la restricción correspondiente.

➡ Ejemplo:

$$2.tgx+1=\frac{\cos x+2.senx}{\cos x} \qquad \text{con } x\in R-\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2},k\in Z\right\}$$

Distribuyendo el denominador en el 2º miembro

$$2.tgx+1=\frac{\cos x}{\cos x}+\frac{2.senx}{\cos x}$$

Simplificando en el 1º término del 2º miembro

$$2.tgx+1=1+2.tgx$$

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Una ecuación trigonométrica es aquella ecuación en la que aparecen una o más funciones trigonométricas. En las ecuaciones trigonométricas la incógnita es el ángulo común de las funciones trigonométricas. No puede especificarse un método general que permita resolver cualquier ecuación trigonométrica. Algunas observaciones importantes para tener en cuenta para la resolución:

1) La ecuación trigonométrica se expresa en términos de un mismo ángulo.
2) Se debe expresar la ecuación en términos de una misma función trigonométrica.
3) En caso de no poder expresar la ecuación en una misma función se debe tratar de factorizar y expresar en producto para aplicar el teorema del producto igual a cero.
4) Se resuelve algebraicamente la ecuación, considerando como incógnita la función que aparece en la ecuación.
5) Si se elevan cuadrados o se quitan denominadores deben probarse las soluciones y descartar aquellos valores que no los satisfacen.
6) Se debe tener presente que $-1 \le \text{sen } x \le 1$ y $-1 \le \cos x \le 1$
7) Algunas soluciones particulares de ángulos son $\alpha,\ \pi-\alpha,\ \pi+\alpha,\ -\alpha$

<u>Observación</u>: en las soluciones pueden aparecer valores extraños (debido a la manipulación de las ecuaciones al tratar de reducirlas), por ejemplo: nos puede resultar un cos x = 2, el que debemos descartar, obviamente, pues el codominio del coseno se limita a [-1, 1]. También, debemos verificar todas las respuestas obtenidas y aceptar sólo aquellas que satisfacen la ecuación original.
Como las funciones trigonométricas repiten su valor y signo en dos de los cuadrantes (debido a su periodicidad), hay que tener presente que siempre habrá por lo menos dos ángulos distintos en la solución de una ecuación trigonométrica de la forma tri$x$ = a (donde tri: es una de las seis funciones trigonométricas y a: número cualquiera en el codominio de la función). Además, debido a que cuando el lado terminal de un ángulo realiza un giro completo se genera otro ángulo equivalente, es necesario añadir a las soluciones obtenidas un múltiplo de 360°, esto es, k.360°, y k es un entero.

➡ Ejemplo: Encontrar la solución de la ecuación trigonométrica en el intervalo $0 \le x \le 2\pi$

$$2.\cos^2 x+5.\text{sen } x=4$$

Solución:

$$2.\cos^2 x+5.\text{sen } x=4$$

Utilizando la relación pitagórica $\qquad 2.\left(1-\text{sen}^2 x\right)+5.\text{sen } x=4$

$$2.\text{sen}^2\, x + 5.\text{sen}\, x - 2 = 0$$

Realizando un cambio de variable, sen x=t

$$2.t^2 + 5.t - 2 = 0$$

Aplicando la fórmula resolvente de la ecuación de segundo grado, se obtienen dos soluciones

$$\frac{5 \pm \sqrt{25 - 4.2.(-2)}}{2.2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Si $t_1 = 2$; $\text{senx} = 2$ Esta solución se debe descartar porque la imagen del coseno se limita a [-1, 1]	Si $t_2 = \dfrac{1}{2}$; $\text{senx} = \dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $x = \dfrac{\pi}{6} = 30°$ y $x = \dfrac{5\pi}{6} = 150°$

➡ Hallar el valor de x siendo $0 \le x < 360°$ (sin usar calculadora)

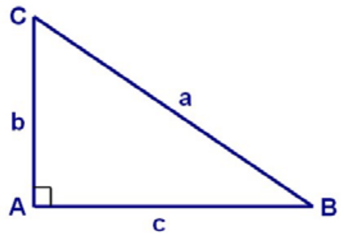
a) $\left(4\cos^2 x - 3\right)(\text{sen}\, x + 2) = 0$

b) $\cos ec\ x + \cot g\ x = \sqrt{3}$ si $sen\, x \neq 0$ Rta. 60º, 180º, 300º

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Para resolver problemas modelizados por triángulos rectángulos, se pueden utilizar tres recursos:

- Los **ángulos** agudos de un triángulo rectángulo son **complementarios.**
- Las **razones trigonométricas** seno, coseno y tangente (vinculan dos lados y un ángulo).
- **Teorema de Pitágoras**: "En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos" (este teorema vincula los tres lados de un triángulo rectángulo).



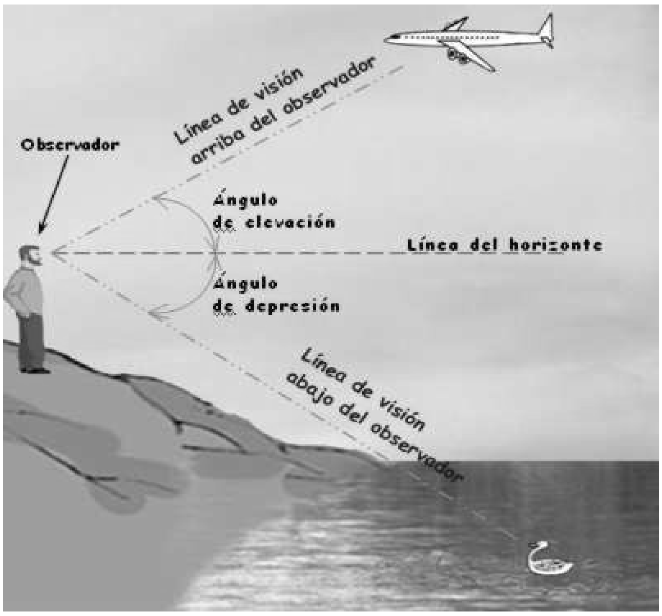
Triángulo ABC, rectángulo en $\hat{A}$
a: hipotenusa
b y c: catetos

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Atención!! Ángulos que aparecen con frecuencia en los problemas de triángulos rectángulos.

Se llama línea de visión a la recta imaginaria que une el ojo de un observador con el lugar observado.

Llamamos **ángulo de elevación** al que forman la horizontal del observador y el lugar observado cuando éste está situado arriba del observador. Cuando el observador está más alto lo llamaremos **ángulo de depresión**.



Estrategias para resolver triángulos

Un triángulo se caracteriza por sus tres lados y sus tres ángulos.

Todos los ejercicios posibles sobre triángulos se reducen a completar los valores desconocidos de sus lados y sus ángulos a partir de ciertos datos, uno de ellos tiene que ser un lado.

Resolver triángulos es seguir el proceso siguiente:

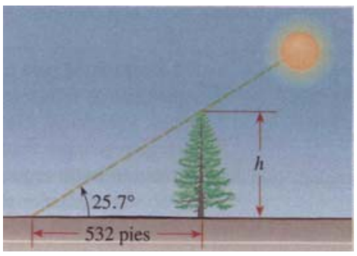
1	Se dibuja un triángulo, se signa con las letras usuales
2	Los datos se escriben sobre el propio triángulo
3	¿Qué fórmulas ligan los datos y las incógnitas?
4	Se escriben tales relaciones de las que resultará una ecuación o un sistema de ecuaciones
5	Se resuelve la ecuación o el sistema resultante
6	Se discute la solución
7	Se comprueban los resultados

NOTA: Obsérvese que todos los ejemplos se resuelven con el mismo proceso; esto es: aplicando a cada caso cada una de las secuencias del esquema anterior. Este proceso es el mismo que se aplicará en los triángulos oblicuángulos

➨ Ejemplos

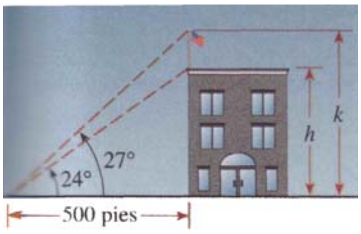
Un pino proyecta una sombra de 532 pies de largo. Encuentre la altura del árbol si el ángulo de elevación del Sol es de 25,7°.

Rta. 256 pies



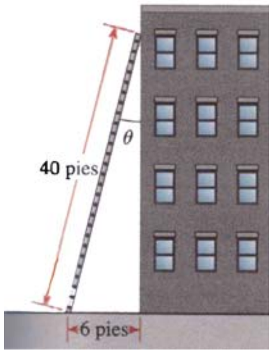
Desde un punto sobre el suelo a 500 pies de la base de un edificio, un observador encuentra que el ángulo de elevación hasta la parte superior del edificio es 24° y que el ángulo de elevación a la parte superior de un asta de bandera sobre el edificio es 27°. Determine la altura del edificio y la longitud del asta.

Rta. 223 y 32



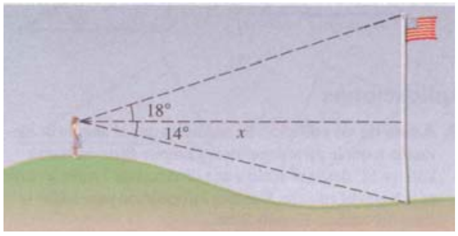
Una escalera de 40 pies está apoyada en un edificio. Si la base de la escalera está separada 6 pies de la base del edificio, ¿cuál es el ángulo que forman la escalera y el edificio?

Rta. 8,6°



Una mujer parada sobre una colina ve un asta de bandera que sabe tiene 60 pies de altura. El ángulo de depresión respecto de la parte inferior del asta es 14° y el ángulo de elevación respecto de la parte superior del asta es de 18°. Encuentre la distancia x desde el asta.

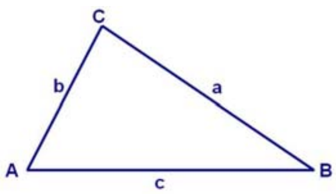
Rta. 104,48 pies



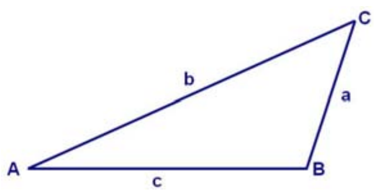
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Oblicuángulo se contrapone a rectángulo, en sentido estricto. Pero cuando se habla de triángulos oblicuángulos no se pretende excluir al triángulo rectángulo en el estudio, que queda asumido como caso particular. No obstante cuando el triángulo es rectángulo, porque se dice expresamente que lo es, el problema se reduce, tiene un tratamiento particular y no se aplican las técnicas generales de resolución que se verán seguidamente.

Un **triángulo oblicuángulo** es aquel que no tiene ángulos rectos, por lo que no se puede resolver directamente por el teorema de Pitágoras, el triángulo oblicuángulo se resuelve por leyes de senos y de cosenos.



Triángulo acutángulo



Triángulo obtusángulo

Se utilizan tres propiedades:

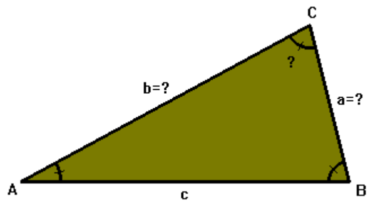
Suma de los ángulos interiores de un triángulo	$A + B + C = 180°$
Teorema del seno	$\frac{\text{Sen } A}{a} = \frac{\text{Sen } B}{b} = \frac{\text{Sen } C}{c}$

Teorema del coseno	$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos C$

Casos de resolución

Existen cuatro casos de resolución de triángulos oblicuángulos según los datos que conozcamos:

Caso I.- Conocidos un lado y dos ángulos adyacentes a él (LAA).



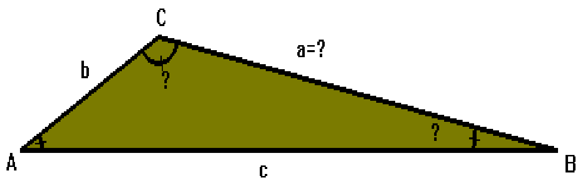
En primer lugar, se calcula fácilmente el ángulo C.

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \hat{C}$$

A continuación, se aplica el teorema de los senos y se calculan los ángulos A y B.

$$\frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \quad \Rightarrow \quad b \qquad\qquad \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = \frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} \quad \Rightarrow \quad a$$

Caso II.- Conocidos dos lados y el ángulo comprendido (LAL).



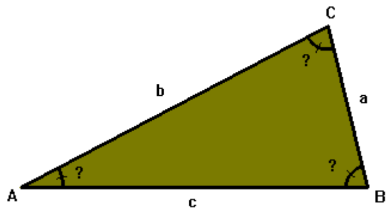
En primer lugar calculamos b aplicando el teorema del coseno.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{B} \quad \Rightarrow \quad a$$

Seguidamente, aplicando el teorema del seno, calculamos los ángulos B y C.

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \quad \Rightarrow \quad \hat{B} \qquad\qquad \frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \quad \Rightarrow \quad \hat{C}$$

Caso III.- Conocidos los tres lados (LLL).



Aplicamos tres veces el teorema del coseno.

$$\cos\hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow \hat{A} \qquad \cos\hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \Rightarrow \hat{B} \qquad \cos\hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \Rightarrow \hat{C}$$

Caso IV.- Conocidos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos (LLA).

Supongamos conocidos los lados a y c y el ángulo A; quedarían como incógnitas el lado b y los ángulos B y C.

En primer lugar se aplica el teorema del seno.

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \quad \Rightarrow \quad \hat{C}$$

Ya estamos en condiciones de conocer el ángulo que falta, B.

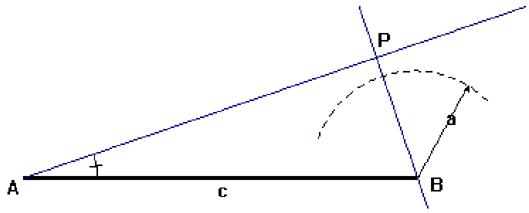
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180º \quad \Rightarrow \quad \hat{B}$$

Por último volvemos a aplicar el teorema del seno y calculamos el lado b.

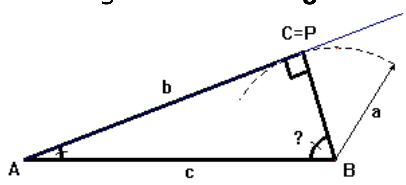
$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \quad \Rightarrow \quad b$$

Pues bien, se nos pueden dar, en este último caso, las siguientes posibilidades:

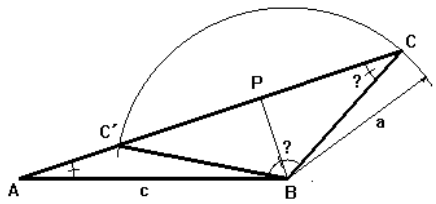
- **a < c.sen A**, con lo cual el triángulo **no existe**.



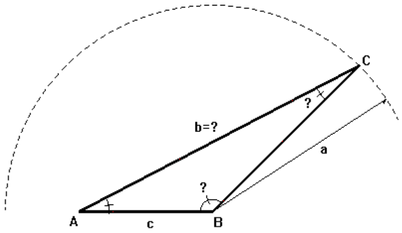
- **a = c.sen A**, con lo cual el triángulo es **rectángulo**.



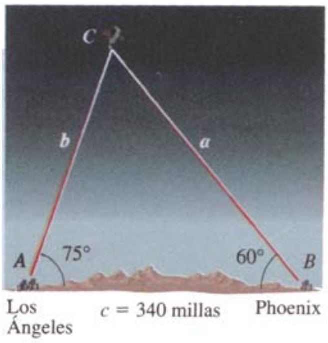
- **a > c.sen A y a< c,** en cuyo caso **existen dos triángulos: ABC** y **ABC´.**



- **$a > c.\text{sen } A$ y $a \geq c$**, con lo cual estamos en el caso de **un sólo triángulo**. Será esta posibilidad la que ocupe nuestro estudio dentro del caso IV.

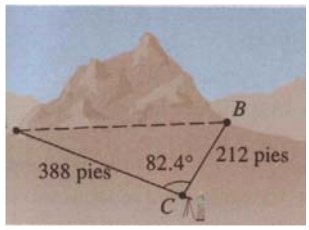


➡ Ejemplos



Un satélite que orbita la Tierra pasa directamente arriba de las estaciones de observación en Phoenix y Los Ángeles, apartadas 340 millas. En un instante cuando el satélite está entre estas dos estaciones, su ángulo de elevación es observado de manera simultánea como 60° en Phoenix y 75° en Los Ángeles. ¿Qué tan lejos está el satélite de Los Ángeles?

Rta. 416 millas

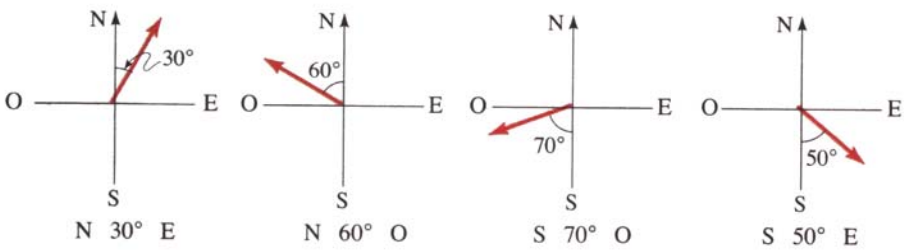


Se construirá un túnel por una montaña. Para estimar la longitud de un túnel, un topógrafo hace las mediciones mostradas en la figura. Use los datos del topógrafo para aproximar la longitud del túnel.

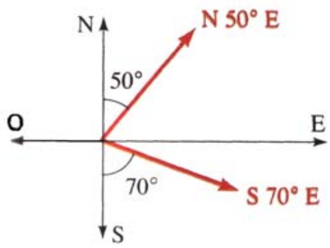
Rta. 417 pies

Navegación: dirección y rumbo

En navegación una dirección se da con frecuencia como un **rumbo**, es decir, como un ángulo agudo medido a partir del norte o del sur. El rumbo N 30º S, por ejemplo, indica una dirección que apunta 30º al este del norte.



➡ Ejemplo



Navegación. Dos botes salen del mismo puesto a la misma hora. Uno viaja a una velocidad de 30 millas/h en la dirección N 50º E y el otro viaja a una velocidad de 26 millas/h en una dirección S 70º E. ¿Qué tan separados están los botes después de una hora?

Rta. 28,2 millas

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las funciones trigonométricas junto con las logarítmicas y las exponenciales, constituyen funciones de variable real sencillas que no se pueden expresar mediante "operaciones algebraicas", esto es, no se pueden definir sólo en términos de suma, resta, multiplicación, división y potencias racionales de una variable x, se denominan *funciones trascendentes*.

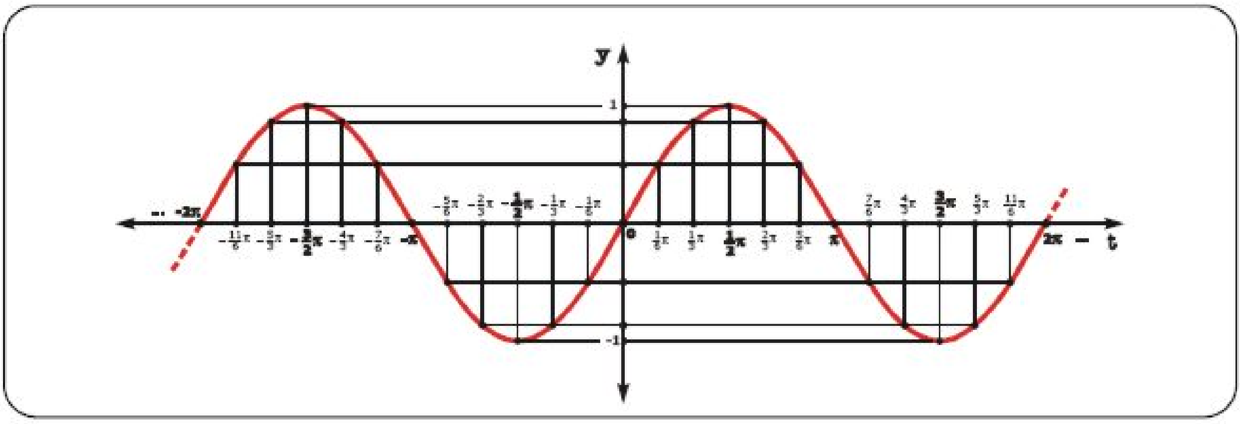
Gráfica de las funciones trigonométricas

Al construir las gráficas de las funciones trigonométricas, **siempre los ángulos estarán expresados en radiane**s, o sea números reales.

Para visualizar un ángulo como variable utilizaremos nuevamente el punto P moviéndose en la circunferencia unitaria.

Nos dedicaremos a deducir la gráfica de la función seno.

Estos segmentos ubicados en el sistema de coordenadas que llamamos y vs. t nos sugiere que la curva del seno tiene la forma que dibujamos en la última parte de la figura.



Función seno: **y = sen (t)**

Resumiendo, las **características de la función seno**, son

1. El dominio es el conjunto de todos los números reales.
2. El conjunto imagen consta de todos los números reales entre −1 y 1 inclusive.
3. La función seno es una función impar, es decir, que gráficamente ésta es simétrica con respecto al origen.
4. La función seno es periódica con período 2π
5. Las intersecciones con el eje de abscisas son $t = \ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots = k\pi$ con $k \in Z$; la intersección con el eje de ordenadas es $y = 0$.
6. El valor máximo es 1 y ocurre en los siguientes valores de la variable independiente:

$$t = \ldots -\frac{3}{2}\pi; \frac{\pi}{2}; \frac{5}{2}\pi; \frac{9}{2}\pi \ \ldots = (4k+1)\frac{\pi}{2} \text{ con } k \in Z.$$

7. El valor mínimo es −1 y ocurre en los siguientes valores:

$$t = \ldots -\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi; \frac{7}{2}\pi; \frac{11}{2}\pi \ldots = (4k-1)\frac{\pi}{2} \text{ con } k \in Z$$

Comportamiento de la función f(t) = sen t en + ∞ y - ∞

Cuando se dice que **"t tiende a más infinito"** y se escribe $t \to +\infty$, se refiere a que x toma valores **cada vez más grandes** en valor absoluto con signo **positivo**. Es decir, en la recta numérica el valor de t "se aleja" hacia la derecha. En cambio, se dice que **"t tiende a menos infinito"** y se escribe $t \to -\infty$, se refiere a que t toma valores cada vez **más grandes** en valor absoluto pero con signo **negativo**. En la recta numérica se aleja hacia la izquierda.

Tanto cuando $t \to +\infty$, como cuando $t \to -\infty$, la función seno "se mueve" en la banda encerrada entre y=1 e y=-1. Por lo tanto no existen valores de t donde f resulta mayor, en valor absoluto, que 1.

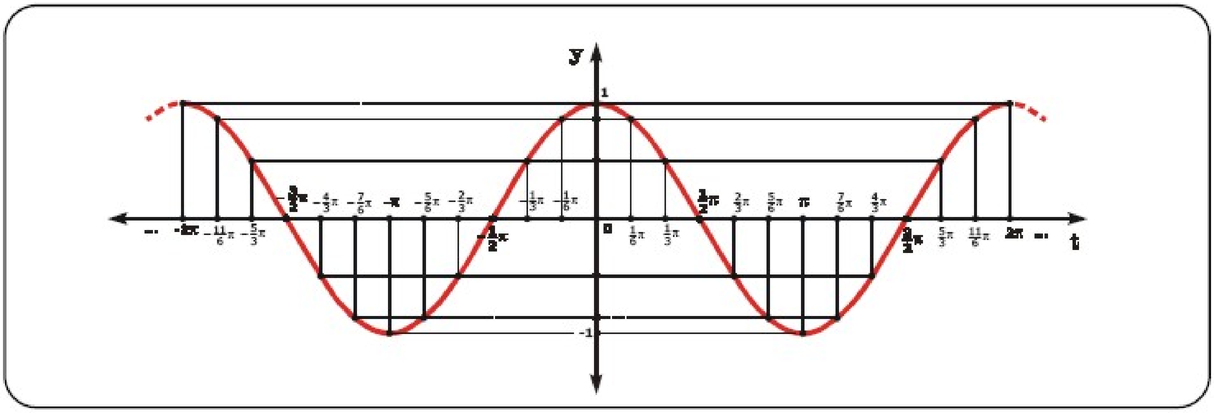
Se podría suponer que el límite cuando $t \to +\infty$ y $t \to -\infty$ de f debería ser un número L.

En este caso, la función se tendría que "meter" en una franja muy chiquita alrededor de l. Pero como esta función oscila indefinidamente entre los valores y=1 e y=-1, no existe un franja tan chiquita como se quiera, alrededor de un valor donde f se "meta" completamente para t cada vez más grandes en valor absoluto.

Escrito con símbolos: no existe $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$, ni $\lim\limits_{t \to -\infty} f(t)$

Ya vimos como se genera la gráfica de la función seno de t, del mismo modo en la práctica trabajaron para lograr las gráficas del coseno de t y de la tangente de t.

De modo que la gráfica del coseno de t puede resumirse:



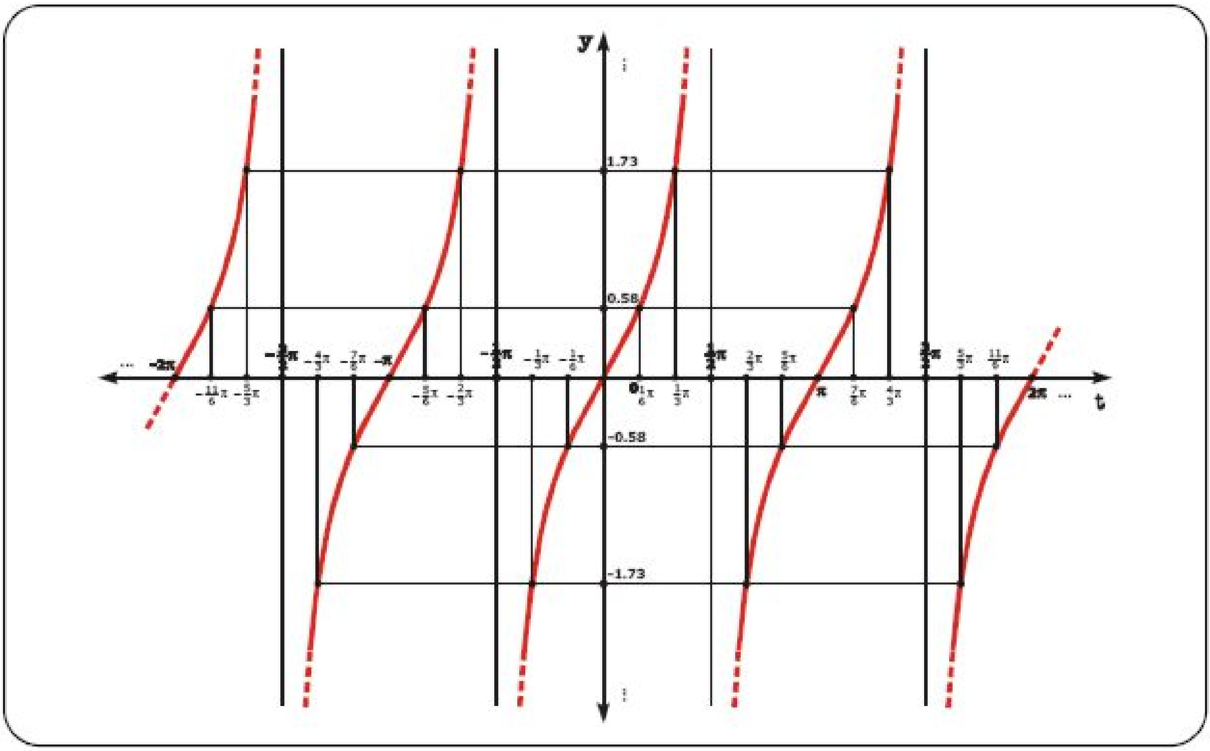
Función coseno: **y = cos (t)**

Resumiendo, las **características de la función coseno**, son

1. El dominio es el conjunto de todos los números reales.
2. El conjunto imagen consta de todos los números reales entre −1 y 1 inclusive
3. La función coseno es una función par, es decir, que gráficamente es simétrica con respecto al eje de ordenadas.
4. La función coseno es periódica con período 2π
5. Las intersecciones con el eje de abscisas son $t = \ldots, -\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \ldots = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ con $k \in Z$; la intersección con el eje de ordenadas es $y = 1$.
6. El valor máximo es 1 y ocurre en los siguientes valores de la variable independiente: $t = \ldots, -4\pi, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, \ldots = 2k\pi$ con $k \in Z$ (enteros pares de pi)

7. El valor mínimo es −1 y ocurre en los siguientes valores: $t = \ldots, -3\pi\,, -\pi\,, 0\,, \pi\,, 3\pi\,, \ldots = (2k+1)\pi$ con $k \in Z$ (enteros impares de pi).

En el caso de la gráfica de la tangente de t puede resumirse:

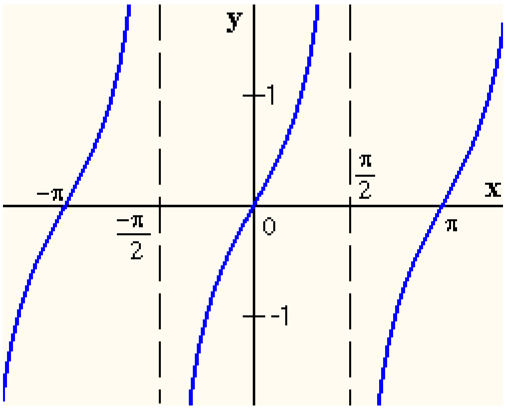


Función tangente: **y = tg (t)**

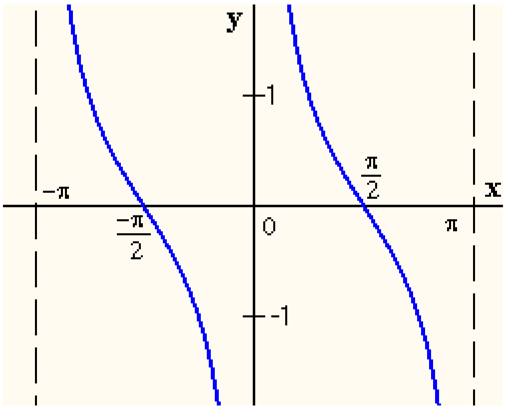
Resumiendo, las **características de la función tangente**, son

5. La función tangente no tiene máximos ni mínimos.
1. El dominio es el conjunto de todos los números reales, excepto en $t = \ldots, -\frac{3}{2}\pi\,, -\frac{\pi}{2}\,, \frac{\pi}{2}\,, \frac{3}{2}\pi\,, \frac{5}{2}\pi\,, \ldots$, es decir para $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in Z$
2. El conjunto imagen es el conjunto de todos los números reales.
3. La función tangente es periódica con período π
4. Las intersecciones con el eje de abscisas son $t = \ldots, -2\pi\,, -\pi\,, 0\,, \pi\,, 2\pi\,, 3\pi\,, \ldots = k\pi$ con $k \in Z$; la intersección con el eje de ordenadas es $y = 0$.
5. La función tangente no tiene máximos ni mínimos.

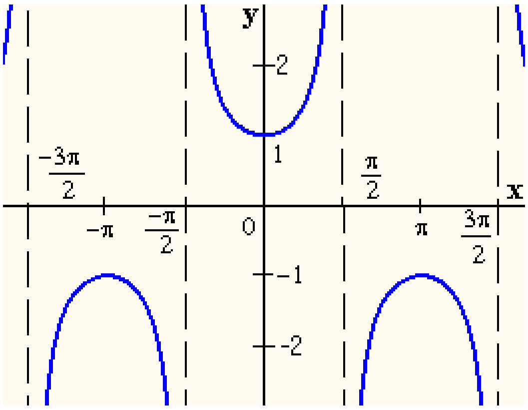
Resumen de las gráficas de las funciones trigonométricas



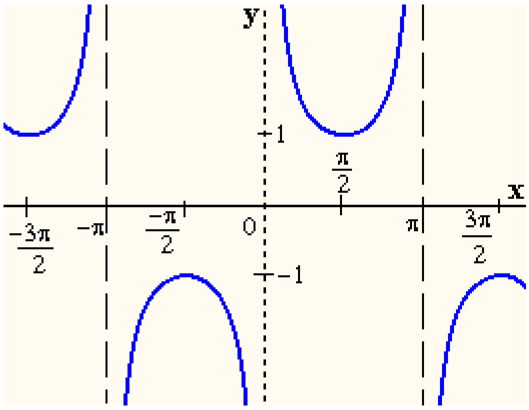
Función tangente: **y = tg (x)**



Función cotangente: **y = cotg (x)**



Función secante: **y = sec (x)**



Función cosecante: **y = cosec (x)**

Algunas aclaraciones:

La función f(x) tiende a infinito cuando x tiende a infinito, ya sea +∞ o -∞, significa que cuando x toma valores muy grandes en valor absoluto, la función f(x) evaluada en esos puntos también resulta ser **muy grande** en valor absoluto. Es decir, la función se continúa "alejando" del eje x ya sea hacia arriba o hacia abajo.

La