# PROGRAMACIÓN LINEAL

La programación lineal trata el problema de asignar recursos limitados entre actividades competidoras de la mejor manera posible ( es decir óptima).

Se usa un modelo matemático para describir el problema.

Función Objetivo Lineal
Restricciones Lineales
Variables Positivas

La palabra programación no se refiere acá a programación de computadoras, sino es esencialmente un problema de planificación.

La PL comprende la planificación de actividades para obtener un resultado óptimo, es decir un resultado que alcance la meta especificada en la mejor forma ( según el modelo matemático) entre todas las alternativas factibles.

## EJEMPLO

La Wyndor Glass Co. Es un productor de productos de vidrio de alta calidad, incluyendo ventanas y puertas de vidrio.
Tiene tres plantas. Los marcos de aluminio y la herrería se hacen en la planta 1, los marcos de madera se fabrican en la planta 2 y la planta 3 se usa para producir el vidrio y montar los productos.

Debido a la disminución de las ganancias, el gerente general ha decidido reorganizar la línea de productos. Se están discontinuando varios productos improductivos y esto liberará la capacidad de producción para pensar en uno, o ambos, de dos nuevos productos potenciales que han sido solicitados. Uno de estos productos propuestos (producto 1) es una puerta de vidrio de 8 pies con marco de aluminio. El otro (producto 2) es una ventana grande (4X6 pies) con marco de madera y de guillotina. El Departamento de Mercadotecnia ha concluido que la compañía podría vender tanto de cualquiera de los dos productos como pudiera producirse con la capacidad disponible. Sin embargo, como los dos productos competirían por la misma capacidad de producción en la planta 3, no se ve claro que mezcla entre los dos productos sería la más ventajosa. Por lo tanto, el gerente ha pedido a su Departamento de Investigación de operaciones que estudie esta cuestión

Después de algunas investigaciones, el Departamento de IO determinó :

1) el porcentaje de la capacidad de producción de cada planta del que se dispondría para estos productos,
2) los porcentajes requeridos por cada producto para cada unidad producida por minuto y
3) la utilidad unitaria para cada producto.

En la siguiente tabla se resume esta información

Datos para la Wyndor Glass Co.

| Producto / Planta | Capacidad usada por tasa unitaria de producción 1 | 2 | Capacidad disponible |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 4 |
| 2 | 0 | 2 | 12 |
| 3 | 3 | 2 | 18 |
| Utilidad unitaria | \$3 | \$5 | |

## Planteamiento del problema

$x_1$ : número de unidades del producto 1 producidos por minuto

$x_2$ : número de unidades del producto 2 producidos por minuto

Z : Contribución a la utilidad por minuto

Variables de Decisión : $x_1$, $x_2$

El objetivo sería elegir valores de $X_1$ y $x_2$ de modo de maximizar :

$$Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

y

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

## RESOLUCIÓN GRÁFICA

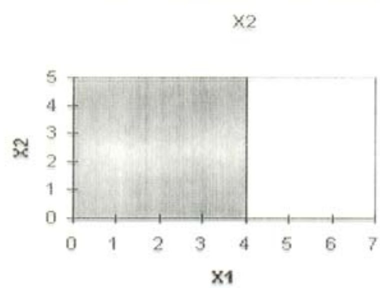


Figura - El área sombreada muestra los valores de $(x_1, x_2)$ permitidos por $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1 \leq 4$

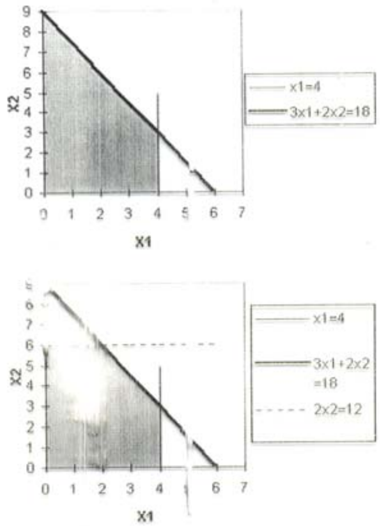


Figura - El área sombreada muestra los valores permisibles de $(x_1,x_2)$

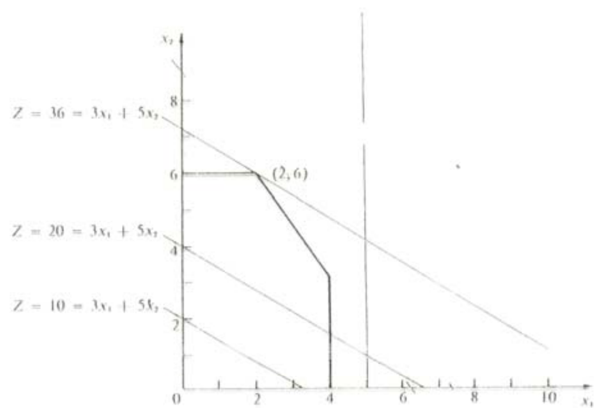


Figura - Valor de $(x_1,x_2)$ que maximiza $3x_1+5x_2$

El procedimiento gráfico es trazar una familia de rectas paralelas que contengan al menos un punto de la región permisible y seleccionar aquella que se encuentre más alejada del origen ( en la dirección de los valores crecientes de Z)

## EL MODELO DE PROGRAMACIÓN LINEAL

1,.....,m: Cantidad de recursos limitados

1,......,n: Número de actividades competidoras

$x_j$: variable de decisión para j=1.....n:

Z: medida global de la efectividad

$c_j$: el incremento en Z que resultaría debido a cada unidad de incremento en $x_j$.

$b_i$: cantidad de recurso **i** disponible para la asignación

$a_{ij}$: cantidad de recurso **i** consumida por cada unidad de la actividad j

## FORMATO ESTANDAR DEL MODELO

Datos para el modelo de programación lineal

| Recurso \ Actividad | Uso del recurso/unidad 1 | 2 | ··· | n | Cantidad del recurso disponible |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $a_{11}$ | $a_{12}$ | ··· | $a_{1n}$ | $b_1$ |
| 2 | $a_{21}$ | $a_{22}$ | ··· | $a_{2n}$ | $b_2$ |
| ⋮ | | | ⋮ | | ⋮ |
| m | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | ··· | $a_{mn}$ | $b_m$ |
| ΔZ/unidad | $c_1$ | $c_2$ | ··· | $c_n$ | |
| Nivel | $x_1$ | $x_2$ | ··· | $x_n$ | |

En particular, este modelo es para seleccionar los valores para $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a fin de :

$$\text{Maximizar } Z=c_1x_1+c_2x_2+.....+c_nx_n$$

sujeta a las restricciones:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+.....+a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+.....+a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+....+a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$$

Este es el formato estándar del problema

Solución factible: es una solución para la que se satisfacen todas las restricciones

Solución óptima: es la mejor de todas las soluciones factibles

Caso de una o de infinitas soluciones óptimas

Caso en que no existen soluciones óptimas

## EL MÉTODO SIMPLEX

Estructura de los algoritmos:

Paso de Inicialización: Arreglo para principiar las iteraciones

Paso iterativo: Repítase tantas veces como se necesite

Regla de detención: Se ha obtenido el resultado que se desea?

No Sí

Detenerse

Establecimiento del método:

$1^{er}$ paso: transformar las restricciones de desigualdad en restricciones de igualdad introduciendo las variables de holgura

Entonces se reemplaza el modelo de programación lineal por un modelo equivalente:

$$\text{Maximizar } Z=3x_1+5x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 \quad +x_3 \quad &= 4 \\ 2x_2 \quad +x_4 \quad &= 12 \\ 3x_1+2x_2 \quad +x_5 &= 18 \end{aligned}$$

y

$$x_j \geq 0 \text{ para j: } 1,\ldots,5$$

Variables no básicas

Variables básicas

Solución básica

Solución básica factible

Resulta conveniente manipular la función objetivo reescribiendo el problema en una forma equivalente:

Maximizar Z

Sujeta a

(0) $Z-3x_1-5x_2 = 0$

(1) $x_1 \quad +x_3 = 4$

(2) $2x_2 \quad +x_4 = 12$

(3) $3x_1+2x_2 \quad +x_5 = 18$

## Bosquejo del método Simplex:

- Paso de inicialización: Identifíquese una solución factible básica inicial
- Paso iterativo: Desplácese hacia una solución básica adyacente que sea mejor.
- Regla de detención: Suspéndase el procedimiento cuando ninguna solución básica adyacente sea mejor.

Cuadro simplex inicial para el problema de la Wyndor Glass Co.

| *Variable básica* | *Ec No* | *Coeficiente de* $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | *Segundo miembro* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 0 | 1 | −3 | −5 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $x_3$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| $x_4$ | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 12 |
| $x_5$ | 3 | 0 | 3 | 2 | 0 | 0 | 1 | 18 |

Paso de inicialización:

La solución factible básica inicial es (0,0,4,12,18)

Regla de detención:

Cuando todos los coeficientes de la ecuación (0) son no negativos

Paso iterativo:

*Parte 1:* Determinar la variable básica que entra en base seleccionando la variable con el coeficiente negativo más grande en la ecuación (0). Columna pivote

*Parte 2:* Determínese la variable básica que sale

*a)* seleccionando cada coeficiente en la columna pivote que sea estrictamente positivo

*b)* dividiendo el segundo miembro de cada renglón entre cada uno de estos coeficientes de su mismo renglón

*c)* identificando la ecuación que tenga la menor de estos cocientes

*d)* seleccionando la variable básica de esta ecuación.

Cálculos para determinar la primera variable básica que sale para el problema de la Wyndor Glass Co.

| Variable básica | Ec. No | $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | Segundo miembro | Razón |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 0 | 1 | −3 | −5 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| $x_3$ | 1 | 0 | 1 | $\boxed{0}$ | 1 | 0 | 0 | 4 | |
| $x_4$ | 2 | 0 | 0 | $\boxed{2}$ | 0 | 1 | 0 | 12 | $\frac{12}{2} = 6 \leftarrow$ mínimo |
| $x_5$ | 3 | 0 | 3 | $\boxed{2}$ | 0 | 0 | 1 | 18 | $\frac{18}{2} = 9$ |

*Parte 3:* Constrúyase una nueva solución básica factible

*Tabla 2.14* Primeros dos cuadros símplex para el problema de la Wyndor Glass Co.

| Iteración | Variable básica | Ec. No | $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | Segundo miembro |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $Z$ | 0 | 1 | −3 | −5 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | $x_3$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| | $x_4$ | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 12 |
| | $x_5$ | 3 | 0 | 3 | 2 | 0 | 0 | 1 | 18 |
| 1 | $Z$ | 0 | 1 | −3 | 0 | 0 | $\frac{5}{2}$ | 0 | 30 |
| | $x_3$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| | $x_2$ | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | 6 |
| | $x_5$ | 3 | 0 | 3 | 0 | 0 | −1 | 1 | 6 |

la ecuación (0) todavía tiene un coeficiente negativo , la regla de detención indica que la solución no es óptima y entonces se regresa al paso iterativo

| Iteración | Variable básica | Ec. No | $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | Segundo miembro |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $Z$ | 0 | 1 | −3 | −5 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | $x_3$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| | $x_4$ | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 12 |
| | $x_5$ | 3 | 0 | 3 | 2 | 0 | 0 | 1 | 18 |
| 1 | $Z$ | 0 | 1 | −3 | 0 | 0 | $\frac{5}{2}$ | 0 | 30 |
| | $x_3$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| | $x_2$ | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | 6 |
| | $x_5$ | 3 | 0 | 3 | 0 | 0 | −1 | 1 | 6 |
| 2 | $Z$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | $\frac{3}{2}$ | 1 | 36 |
| | $x_3$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | 2 |
| | $x_2$ | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | 6 |
| | $x_1$ | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 2 |

La nueva solución básica factible es (2,6,2,0,0) con Z=36, esta solución es óptima porque ninguno de los coeficientes de la ecuación (0) son negativos.

## PRECIOS SOMBRA

El precio sombra para el recurso **i** mide el *valor marginal* de este recurso, es decir la tasa a la cual se podría incrementar Z, incrementando(ligeramente) la cantidad de este recurso ($b_i$) del que se está disponiento. El método Simplex identifica este precio sombra $y_i^*$ por el coeficiente de la i-ésima variable de holgura en la ecuación (0) del simplex final

Del cuadro final del problema anterior

$y_1^*=0$ precio sombra para el recurso 1

$y_2^*=3/2$ precio sombra para el recurso 2

$y_3^*= 1$ precio sombra para el recurso 3

## SITUACIONES ESPECIALES EN EL METODO SIMPLEX

a) Caso en el que hay dos variables con coeficiente negativo de igual valor en la fila (0). Cómo se rompe el empate?

b) Todos los coeficientes de la columna pivote son negativos o cero. El mensaje sería que Z es no acotada.

c) Soluciones óptimas múltiples

Siempre que un problema tiene más de una solución básica factible óptima, al menos una de las variables no básicas tiene un coeficiente de cero en la ecuación (0) final, por consiguiente, al incrementar cualquiera de esas variables no se cambiaría el valor de Z.

d)Caso de un problema de maximización

Conjunto completo de cuadros símplex para obtener [illegible] las soluciones básicas factibles óptimas para el problema de la Wyndor Glass Co., con $c_2$ 2

| Iteración | Variable básica | Ec No | $Z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | Segundo miembro | ¿Solución óptima? |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $Z$ | 0 | 1 | $-3$ | $-2$ | [illegible] | 0 | 0 | 0 | No |
| | $x_3$ | 1 | 0 | $\boxed{1}$ | 0 | [illegible] | 0 | 0 | 4 | |
| | $x_4$ | 2 | 0 | $\boxed{0}$ | 2 | [illegible] | 1 | 0 | 12 | |
| | $x_5$ | 3 | 0 | $\boxed{3}$ | 2 | 0 | 0 | 1 | 18 | |
| 1 | $Z$ | 0 | 1 | 0 | $-2$ | [illegible] | 0 | 0 | 12 | No |
| | $x_1$ | 1 | 0 | 1 | $\boxed{0}$ | [illegible] | 0 | 0 | 4 | |
| | $x_4$ | 2 | 0 | 0 | $\boxed{2}$ | 0 | 1 | 0 | 12 | |
| | $x_5$ | 3 | 0 | 0 | $\boxed{2}$ | $-3$ | 0 | 1 | 6 | |
| 2 | $Z$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 18 | Sí |
| | $x_1$ | 1 | 0 | 1 | 0 | $\boxed{1}$ | 0 | 0 | 4 | |
| | $x_4$ | 2 | 0 | 0 | 0 | $\boxed{3}$ | 1 | $-1$ | 6 | |
| | $x_2$ | 3 | 0 | 0 | 1 | $\boxed{-\frac{3}{2}}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 3 | |
| Extra | $Z$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 18 | Sí |
| | $x_1$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 2 | |
| | $x_3$ | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | 2 | |
| | $x_2$ | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | 6 | |

## ADAPTACION A OTRAS FORMAS DEL MODELO

Es para cuando aparecen otras formas de restricciones funcionales (=,≥)

*Técnica de la variable artificial:* se construye un problema revisado, introduciendo una variable artificial en cada una de las restricciones que la necesiten, sólo con el fin de ser la variable básica inicial para esa ecuación. Las iteraciones automáticamente fuerzan a desaparecer a las variables artificiales una a una hasta eliminar todas, después de lo cual se resuelve el problema real

*Restricciones de igualdad:* Cualquier restricción de igualdad:

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+.......+a_{in}n=b_i$$

en realidad es equivalente a un par de restricciones de desigualdad:

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+.......+a_{in}x_n\geq b_i$$

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+.......+a_{in}x_n\leq b_i$$

**Ejemplo** Modificación al problema de la Wyndor Glass Co.. Se requiere que la planta 3 se usa a toda su capacidad entonces, la tercera restricción $3x_1+2x_2\leq 18$ se convierte en igualdad $3x_1+2x_2=18$, y, además se impone la restricción de que x1 sea mayor que 2, por lo tanto varía la región factible.

Introduciendo las restricciones de holgura para convertir las restricciones de desigualdad en igualdad:

$$\begin{aligned}
&Z=3x_1+5x_2\\
&x_1 \qquad \leq 4\\
&\qquad 2x_2\leq 12\\
&3x_1+2x_2=18\\
&x_1 \qquad \geq 2\\
&x_1\geq 0,\ x_2\geq 0
\end{aligned}$$

En principio, se agregamos las variables flojas para transformas las restricciones de menor en igualdades:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } Z-3x_1-5x_2 &&=0\\
&x_1 \qquad +x_5 &&=4\\
&\qquad 2x_2 \qquad +x_6 &&=12\\
&3x_1+2x_2 &&=18
\end{aligned}$$

$x_1 \qquad\qquad -x_7 = 2$

(Ver graficamente)estas ecuaciones no tienen una solución factible básica inicial.Esto se soluciona agregando variables artificiales para agrandar la zona factible, se crea un problema artificial:

(0) Max $Z-3x_1-5x_2 \qquad = 0$

(1) $x_1 \qquad +x_5 \qquad = 4$

(2) $\qquad 2x_2 \qquad +x_6 \qquad = 12$

(3) $3x_1+2x_2 \qquad +v_1 \quad = 18$

(4) $x_1 \qquad -x_7 \quad +v_2= 2$

FOA :Se minimiza la sumatoria de las variables artificiales:

$v_1=18-3x_1-2x_2$

$v_2=2- x_1+x_7$

(5)MIN FOA=MIN $v=v_1+v_2=20-4x_1-2x_2+x_7$

Min v=Max (-v)

$-v=-20+4x_1+2x_2-x_7$

(5) $-v-4x_1-2x_2+x_7=-20$

| Ec. No | Variable Basica | Z | -v | $x_1$ | $x_2$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $v_1$ | $v_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | | | | |
| 1 | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | | |