



ÁREA DE ELECTRÓNICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
U.N.C.P.B.A.



Sistemas de Control

apuntes capítulo V
(control digital)

**Facultad de Ingeniería -
UNCPBA**

**Dto. de Ingeniería
Electromecánica**

Prof: Dr. Gerardo Acosta

Tema: Introducción al Control Digital- 1

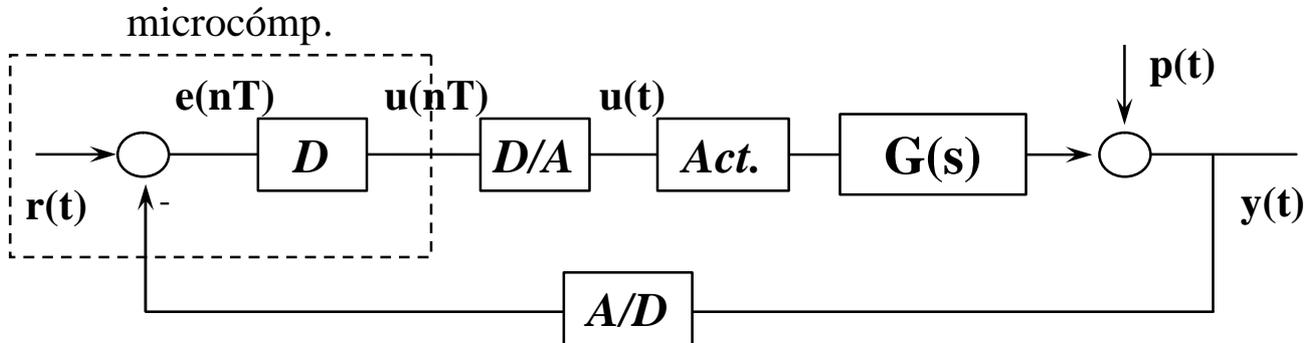
Asignatura de Sistemas de Control-Facultad de Ingeniería-UNCPBA



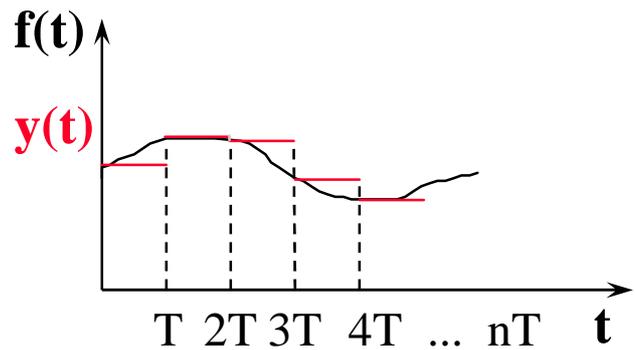
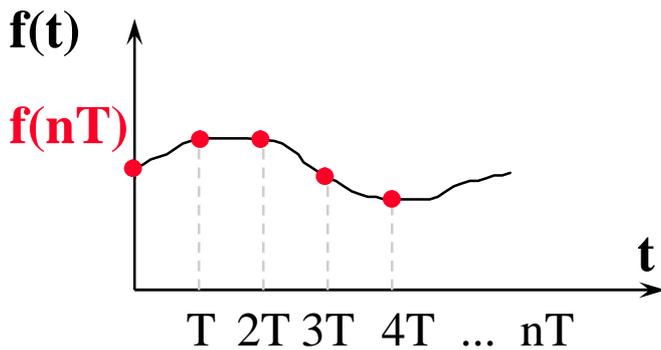
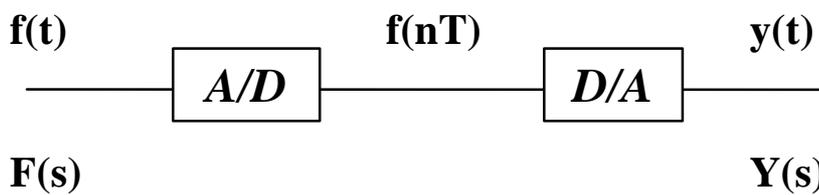
Muestreo y Reconstrucción de Señales



ÁREA DE ELECTRÓNICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
U.N.C.P.B.A.



- coexistencia de
 - ❖ *señales analógicas*
 - ❖ *señales digitales*
 - exigencia de la TL de continuidad



$T =$ período de muestreo

- $y(t)$ se puede expresar en forma de escalones desplazados en el tiempo:



Muestreo y Reconstrucción de Señales

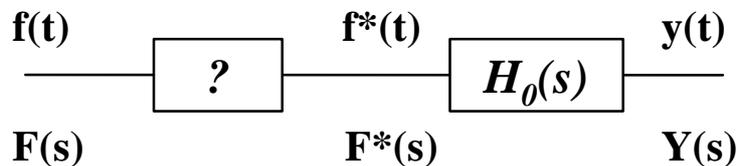
$$[9.1] \quad y(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f(nT)[u(t-nT) - u(t-(n+1)T)]$$

$$\text{donde } u(t-nT) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq nT \\ 0 & \text{si } t < nT \end{cases}$$

❖ *si aplicamos TL:*

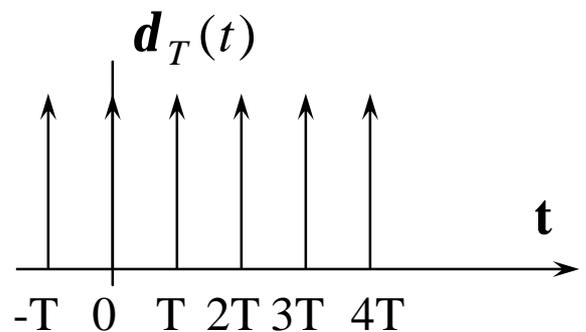
$$\begin{aligned}
 [9.2] \quad Y(s) &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f(nT) \frac{e^{-nTs} - e^{-(n+1)Ts}}{s} = \\
 &= \underbrace{\left[\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f(nT) e^{-nTs} \right]}_{F^*(s)} \underbrace{\left[\frac{1 - e^{-sT}}{s} \right]}_{H_0(s)}
 \end{aligned}$$

❖ *vale decir:*



$$[9.3] \quad f^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f(nT) \mathbf{d}(t-nT)$$

$$[9.4] \quad \text{si } \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \mathbf{d}(t-nT) = \mathbf{d}_T(t)$$



$$[9.5] \quad f^*(t) = f(t) \mathbf{d}_T(t)$$

❖ *f*(t) es un tren de impulsos modulados por f(t)*

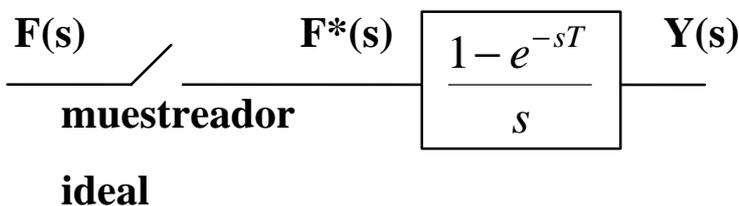


Muestreo y Reconstrucción de Señales



ÁREA DE ELECTRÓNICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
U.N.C.P.B.A.

- Según este modelo, lo que sucede es:
 - ❖ *el conversor A/D entrega a su salida un tren de impulsos modulados por la señal analógica en el instante $t=nT$ correspondiente.*
 - ❖ *el filtro D procesa los pesos de los impulsos suministrados y entrega, cada T unidades de tiempo, otro impulso ponderado por una ecuación interna (recursiva).*
 - ❖ *la acción integradora del conversor D/A transforma estos impulsos en una señal escalonada y continua.*



✓ no existen señales físicas; es una definición.

- Contenido Armónico de la señal muestreada:
 - ❖ *desarrollando en serie de Fourier*

$$d_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n e^{jn\omega_T t}$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} d_T(t) e^{-jn\omega_T t} dt; \quad \omega_T = \frac{2\pi}{T}$$



Contenido armónico

$$[9.6] \quad d_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{jn\omega_T t}; \text{ que es equivalente a la [9.4]}$$

❖ en la [9.5]:

$$[9.7] \quad f^*(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f(t) e^{jn\omega_T t}$$

❖ recordando que $\mathcal{L}\{f(t)e^{lt}\} = F(s-l)$, la [9.7] se convierte en:

$$[9.8] \quad F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} F(s - jn\omega_T)$$

❖ que es la TL de la señal muestreada $f^*(t)$.

- infinitos polos y ceros.
- contiene a los polos de la señal continua $F(s)$.
- los polos de $F^*(s)$ se repiten cada ω_T .

❖ una expresión cerrada para $F^*(s)$:

$$[9.9] \quad F^*(s) = \sum_{\substack{\text{en polos} \\ \text{de } F(s)}} [\text{residuos de } \underbrace{F(s)}_{\text{TL}(f(t))}] \underbrace{\frac{1}{1 - e^{-T(s-l)}}}_{\text{serie de impulsos}}$$



Contenido armónico

- Ejemplo: determinar la TL de la señal que se obtiene al muestrear la sig. señal continua

$$f(t) = 1 - e^{-t}$$

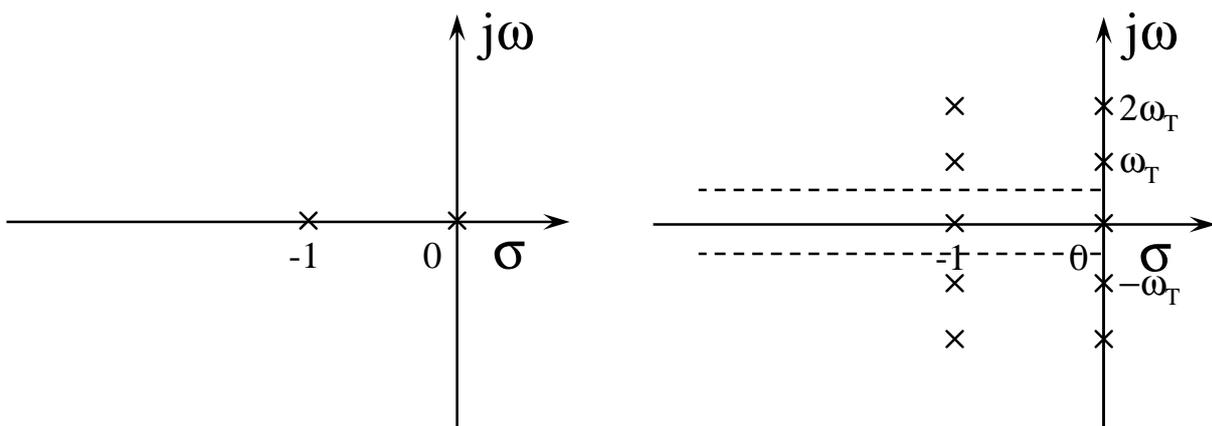
$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)} \therefore F^*(s) = \sum_{l=0}^{\infty} [\text{residuos de } \frac{1}{s(s+1)} \frac{1}{1 - e^{-T(s-l)}}]$$

❖ *cálculo de residuos:*

$$a_k = F(s)(s + p_k) \Big|_{s=-p_k} \therefore F(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s+1}$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{s+1} \Big|_{s=0} = 1 \\ a_2 &= \frac{1}{s} \Big|_{s=-1} = -1 \end{aligned} \right\} + [9.9] \rightarrow F^*(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} - \frac{1}{1 - e^{-(s+1)T}}$$

❖ *si graficamos ambas:*

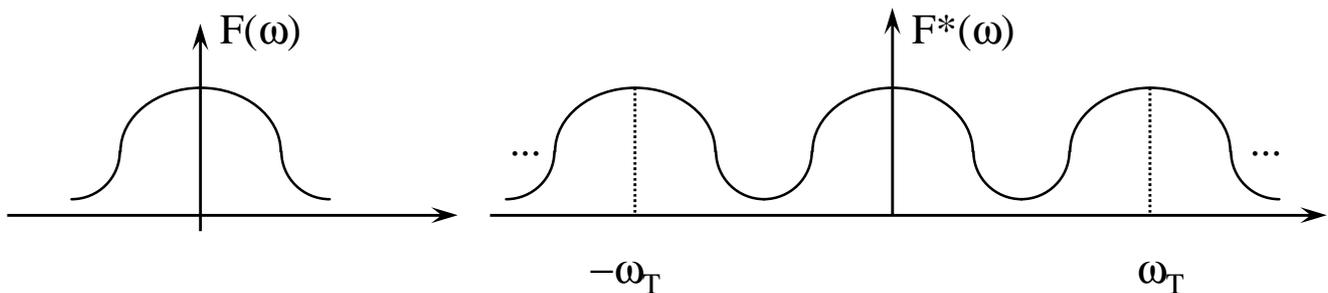


❖ *se define una “banda base” (mitad de frecuencia de muestreo) repetitiva, y los polos de $F(s)$ coinciden con los de $F^*(s)$.*

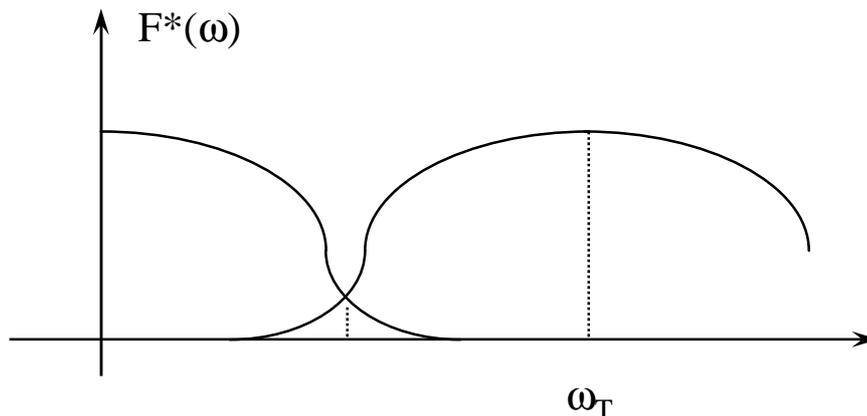


Contenido armónico

- para el análisis del contenido armónico, evaluamos la [9.8] para $s=j\omega$:



❖ $f_{\text{muestreo}} > 2f_{\text{máx}}$ (Teorema de Shannon)



❖ *pero*

- 1) señales difícilmente limitadas en frec.
- 2) filtros pasabajos no ideales.

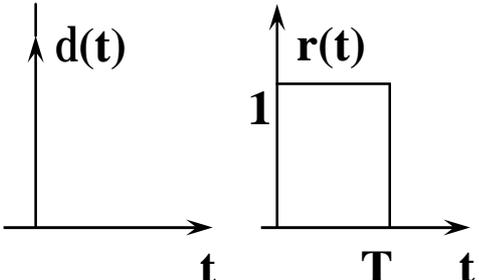
❖ *solución tecnológica*

- ❑ prefiltrado analógico (antialiasing)
- ❑ adecuada selección de ω_T



Reconstrucción de señales

- forma alternativa de obtener la función de transferencia del reconstructor de orden 0:



$$\begin{aligned}
 H_0(s) &= L\{r(t)\} = L\{u(t) - u(t-T)\} \\
 &= \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} = \frac{1 - e^{-sT}}{s}
 \end{aligned}$$

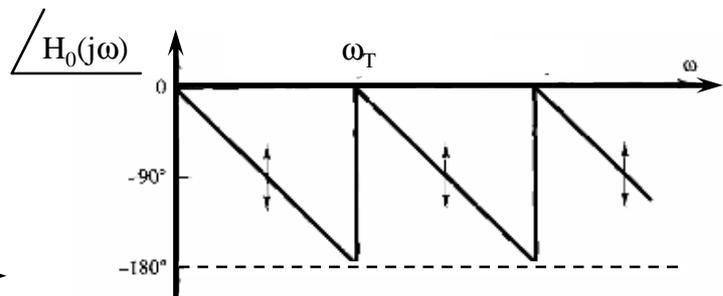
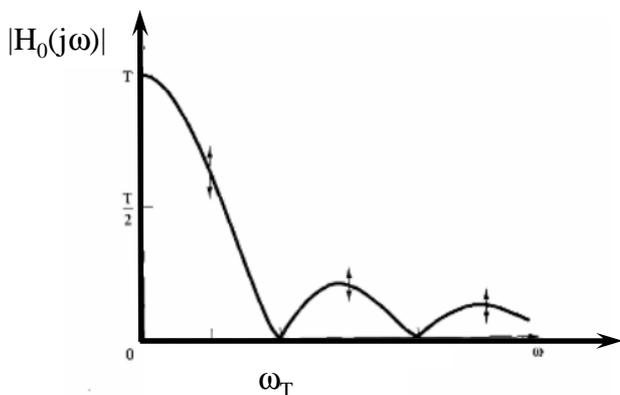
- Para analizar su respuesta en frecuencia:

$$H_0(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = \frac{2e^{-j\omega T/2} e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{2j} = T \frac{\text{sen}(\omega T / 2)}{\omega T / 2} e^{-j\omega T/2}$$

como $\frac{\omega T}{2} = \frac{p\omega}{\omega_T}$ resulta $H_0(j\omega) = T \frac{\text{sen}(p\omega / \omega_T)}{p\omega / \omega_T} e^{-j\omega T/2}$

y de este modo: $|H_0(j\omega)| = T \left| \frac{\text{sen}(p\omega / \omega_T)}{p\omega / \omega_T} \right|$ [9.10]

$\langle H_0(j\omega) \rangle = -\frac{p\omega}{\omega_T} + q; q = \begin{cases} 0, & \text{si } \text{sen}(p\omega / \omega_T) > 0 \\ p, & \text{si } \text{sen}(p\omega / \omega_T) < 0 \end{cases}$ [9.11]





Reconstrucción de señales



ÁREA DE ELECTRÓNICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
U.N.C.P.B.A.

➤ Este reconstructor es el más comúnmente utilizado. Sin embargo, existen de orden superior:

❖ *EXTRAPOLACIÓN POLINOMIAL: desarrollamos en serie de Taylor alrededor de $t = nT$ la salida del reconstructor y...*

$$y(t) = y(nT) + y'(nT)(t - nT) + \frac{y''(nT)(t - nT)^2}{2!} + \dots$$

aproximando la derivada primera como:

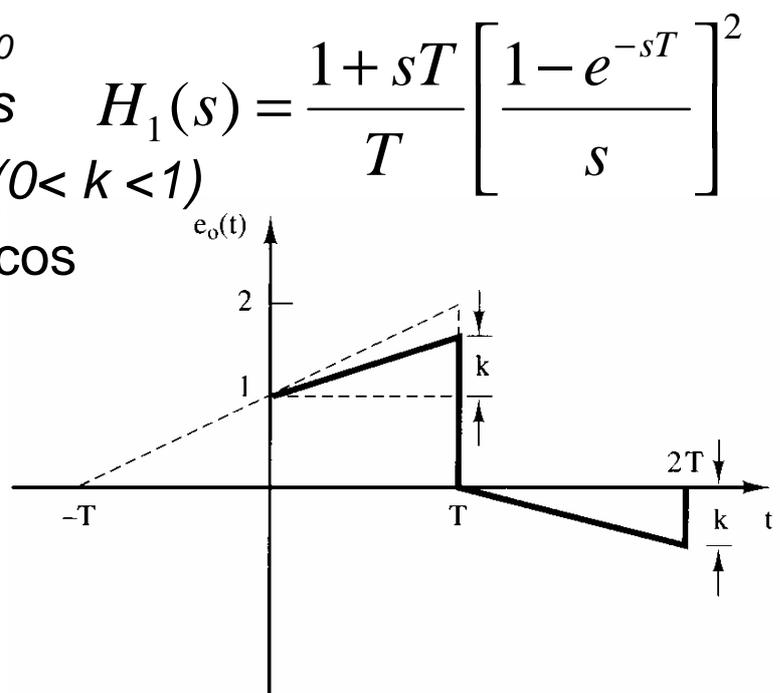
$$y'(nT) = \frac{1}{T}[y(nT) - y((n-1)T)]$$

❖ *1er término es el H_0*

❖ *2 primeros términos*

❖ *casos intermedios ($0 < k < 1$)*

□ *menos económicos*





La transformada Z

- Vimos que la transformada de Laplace de una señal muestreada puede expresarse como:

$$F^*(s) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f(nT)e^{-nsT} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} F(s - jn\omega_T) =$$
$$= \sum_{\substack{\text{en polos} \\ \text{de } F(I)}} [\text{residuos de } F(I) \frac{1}{1 - e^{-T(s-I)}}]$$

- ❖ conviene hacer un cambio de variable compleja:

$$z = e^{sT} \quad \vee \quad s = \frac{1}{T} \ln(z)$$

- Luego, **se define la transformada z** unilateral de una señal muestreada $f(nT)$ como la función:

[9.12]

$$F(z) = F^*(s) \Big|_{s=\frac{1}{T} \ln(z)} = \sum_{n=0}^{n=\infty} f_{nT} z^{-n} \rightarrow z^{-1} \text{ operador de retardo}$$

- Ejemplo: calcular la TZ de la secuencia que se obtiene al muestrear un escalón unitario.

$$f_{nT} = \begin{cases} 1, & \text{si } n \geq 0 \\ 0, & \text{si } n < 0 \end{cases} \therefore F(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} z^{-n} = \frac{z}{z-1} \text{ para } |z| > 1$$



Propiedades de la TZ

➤ LINEALIDAD

$$Z[ax_{1nT} + bx_{2nT}] = aZ[x_{1nT}] + bZ[x_{2nT}], \text{ con } a \text{ y } b \text{ constantes}$$

➤ DESPLAZAMIENTO A DERECHA

$$Z[x_{nT-dT}] = z^{-d} X(z); \mathbf{d > 0}$$

➤ DESPLAZAMIENTO A IZQUIERDA

$$Z[x_{nT+dT}] = z^d \left[X(z) - \sum_{q=0}^{d-1} x_{qT} z^{-q} \right]; \mathbf{d > 0}$$

➤ TRASLACIÓN COMPLEJA

$$Z[x_{nT} e^{-anT}] = x[ze^{-aT}]$$

❖ Ejemplo: $e(k)=k$

$$\therefore E(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \text{ ¿} z[ke^{ak}] \text{?} \rightarrow \mathbf{E(z)} \Big|_{z \leftarrow ze^{-a}} = \frac{z}{(z-1)^2} \Big|_{z \leftarrow ze^{-a}} =$$

$$\frac{ze^{-a}}{(ze^{-a}-1)^2} = \frac{e^a z}{(z-e^a)^2}$$

➤ TEOREMA DEL VALOR INICIAL

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

➤ TEOREMA DEL VALOR FINAL

$$f(nT) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1-z^{-1})F(z) \Big|_{z \rightarrow 1}$$



Ecuación en diferencias

➤ ¿qué es entonces el filtro digital D ?

- ❖ *implementa una relación entre entradas, salidas y estados (particularmente, un algoritmo de control)*
- ❖ *así como un sistema de tiempo continuo de n -ésimo orden puede representarse con una ecuación diferencial lineal:*

[9.13]

$$y(t) = \mathbf{b}_n \frac{d^n e(t)}{dt^n} + \dots + \mathbf{b}_1 \frac{de(t)}{dt} + \mathbf{b}_0 e(t) - \mathbf{a}_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} - \dots - \mathbf{a}_1 \frac{dy(t)}{dt}$$

- ❖ *en el dominio del tiempo discreto, disponemos de su equivalente ecuación en diferencias:*

[9.14]
$$x(k) = b_n e(k) + b_{n-1} e(k-1) + \dots + b_0 e(k-n) - \dots - a_{n-1} x(k-1) - \dots - a_0 x(k-n)$$

➤ Resolución:

- ❖ *Procedimiento secuencial (computadora)*
 - ❖ *Ejemplo: dada $m(k) = e(k) - e(k-1) - m(k-1)$;
 $e(k) = 1$ si k es par ó $= 0$ si k es impar; $e(-1)=0$ y $m(-1)=0$.*
- $k=0: m(0) = e(0) - e(-1) - m(-1) = 1-0-0 = 1$
 $k=1: m(1) = e(1) - e(0) - m(0) = 0-1-1 = -2$
 $k=2: m(2) = e(2) - e(1) - m(1) = 1-0+2 = 3$



Ecuación en diferencias

- la realización por computadora sería (MATLAB):

```
mkmenos1=0;
```

```
ekmenos1=0;
```

```
ek=1
```

```
for k = 0:20,
```

```
    mk = ek - ekmenos1 - mkmenos1;
```

```
    [k,mk]
```

```
    mkmenos1 = mk;
```

```
    ekmenos1 = ek;
```

```
    ek = 1 - ek;
```

```
end
```

- ANTITRANSFORMADA Z

- ❖ OBJETIVO: encontrar la secuencia que dio origen a una función transformada en z. Veremos 3 métodos:

- fórmula de inversión
- series de potencias
- expansión en fracciones parciales



Antitransformada Z

➤ Fórmula de inversión:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} f_{nT} z^{-n}$$

❖ *tiene la forma de una serie de Laurent cuyos coeficientes son las muestras f_{nT}*

$$f_{nT} = \frac{1}{2j\pi} \oint_C F(z) z^{n-1} dz \text{ (integral de Cauchy)}$$

❖ *que puede resolverse aplicando el teorema de los residuos:*

$$f_{nT} = \sum_{\substack{\text{en polos de} \\ F(z)z^{n-1}}} [\text{residuos } F(z)z^{n-1}]$$

❖ Ejemplo:

$$F(z) = \frac{b}{1 - az^{-1}}; \text{ con } a < 1$$

$$\text{Res} = F(z)z^{n-1} (z - a) \Big|_{z=a} = ba^n$$

$$\therefore f_{nT} = ba^n$$



Antitransformada Z

➤ Series de potencias:

$$F(z) = \frac{\sum_{i=0}^{i=m} a_i z^i}{\sum_{j=0}^{j=n} b_j z^j}$$

❖ *si los polos no son fácilmente distinguibles, realizamos una división larga de polinomios*

$$\therefore F(z) = C_0 + C_1 z^{-1} + C_2 z^{-2} + \dots + C_{m-n} z^{m-n}$$

❖ *por definición de TZ [ec. 9.12], los C_i son los valores de la secuencia en el tiempo discreto*

❖ Ejemplo: función seno muestreada

$$F(z) = \frac{z}{z^2 - 1,414z + 1}$$

$$\therefore F(z) = z^{-1} + 1,414z^{-2} + z^{-3} - z^{-5} - 1,414z^{-6} - \dots$$

$$f(0) = f(4) = f(8) = \dots = 0$$

$$f(1) = f(3) = f(9) = \dots = 1$$

$$f(2) = f(10) = \dots = 1,414$$

$$f(5) = f(7) = f(13) = \dots = -1$$

$$f(6) = f(14) = \dots = -1,414$$



Antitransformada Z

➤ Expansión en fracciones parciales:

❖ Ejemplo:

$$E(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$$

□ quitamos z para expandir

$$\therefore \frac{E(z)}{z} = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

□ agregamos z y consultamos tablas

$$Z^{-1}[E(z)] = Z^{-1}\left[\frac{z}{(z-1)(z-2)}\right] = \dots$$

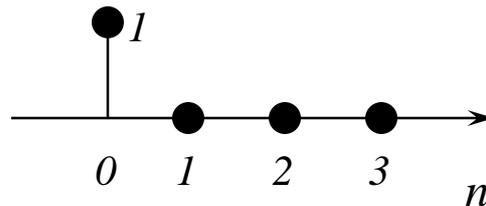
$$\dots = Z^{-1}\left[\frac{-z}{z-1}\right] + Z^{-1}\left[\frac{z}{z-2}\right] = \dots$$

—————→ $e(k) = -1 + 2^k$
de tablas



Función de Transferencia

- **Para investigar el comportamiento de un sistema, le inyectamos una señal de prueba:**



❖ *Delta impulso de Kronecker* $\mathbf{d}_D[n] = 1, 0, 0, 0, \dots$

- matemáticamente simple
- componente básico de otras señales

□ Así, si la secuencia es:

$$x[n] = 3, 1, 2, -1, 0, 0, \dots = (3,0,0,0,\dots)\dots \\ \dots + (0,1,0,0,\dots) + (0,0,2,0,\dots) + (0,0,0,-1,\dots)$$

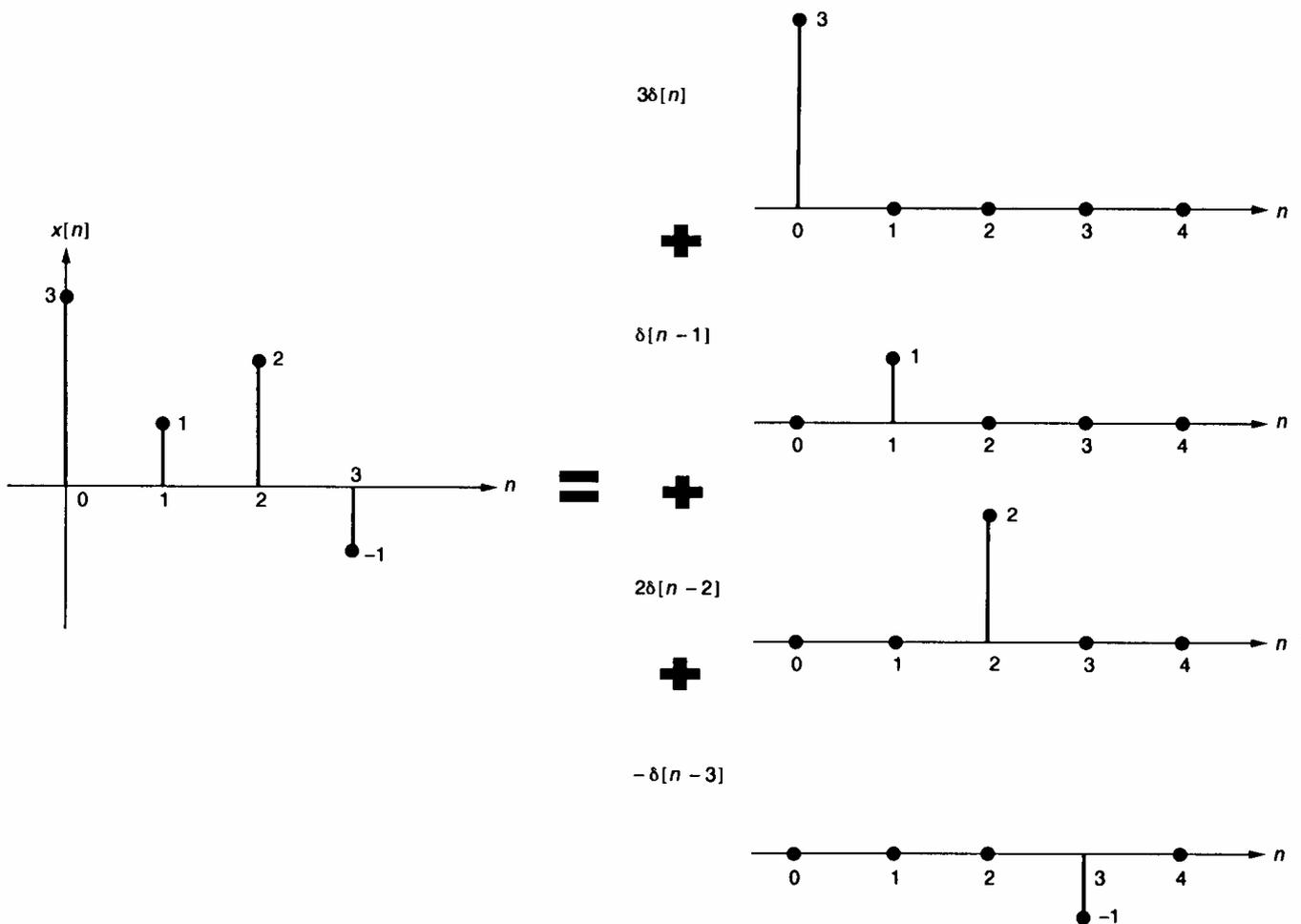
□ podremos reescribirla como:

$$x[n] = 3\mathbf{d}_D[n] + \mathbf{d}_D[n-1] + 2\mathbf{d}_D[n-2] - \mathbf{d}_D[n-3]$$



Función de Transferencia

❖ *Gráficamente:*





Función de Transferencia

❖ *y cualquier secuencia puede expresarse como*

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] d_D[n-k]$$

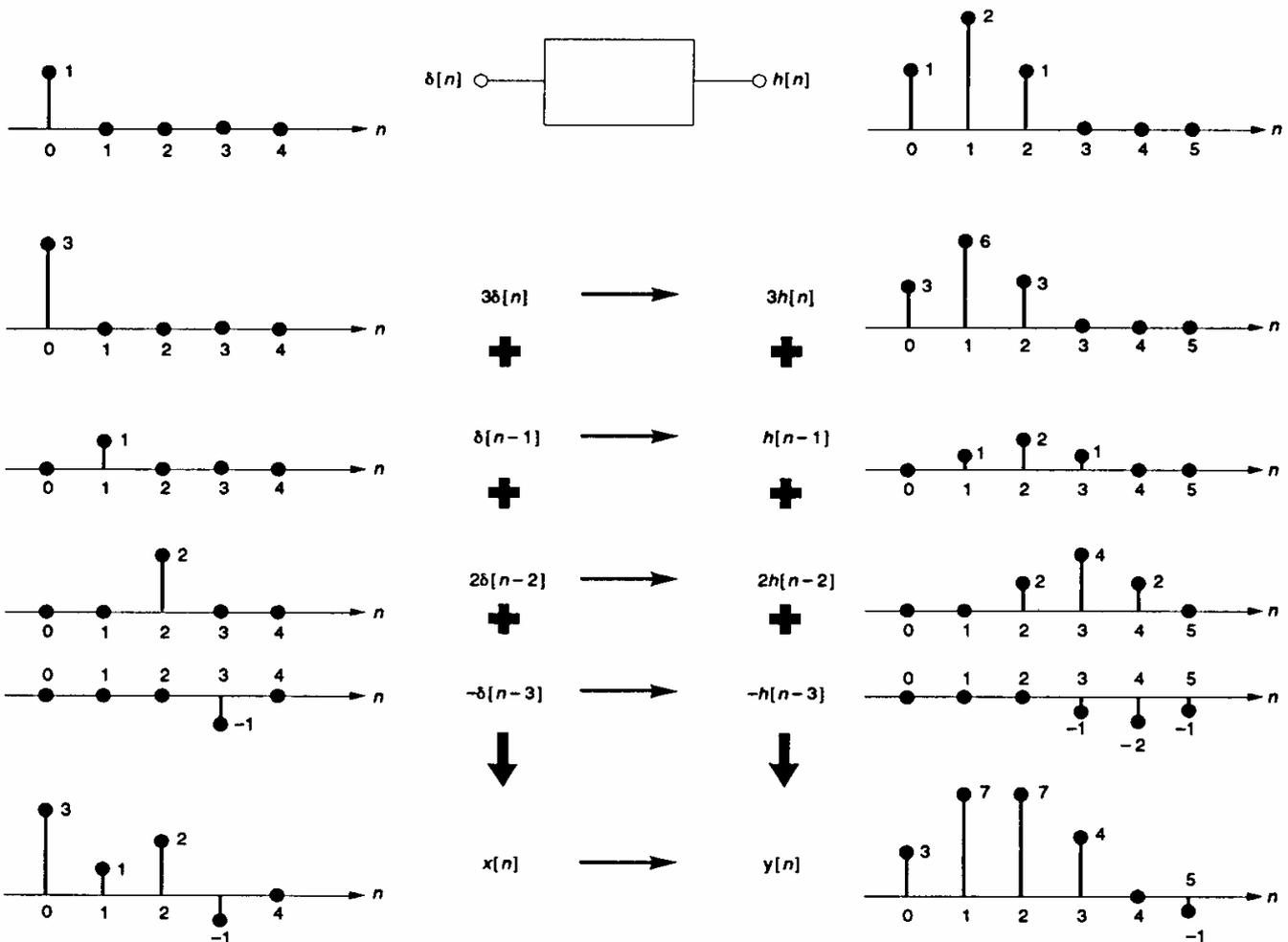
❖ *la respuesta a la d_D permite calcular la respuesta de un sistema lineal e invariante en el tiempo, a cualquier entrada arbitraria*

❖ Ejemplo:

$$x[n] = 3, 1, 2, -1, 0, 0, \dots$$

se aplica a un procesador de tiempo discreto cuya respuesta a la muestra unitaria es

$$h[n] = 1, 2, 1, 0, 0, \dots$$





Función de Transferencia

❖ *El ejemplo anterior puede generalizarse en la*

➤ Sumatoria de Convolución

❖ *cualquier secuencia puede expresarse como*

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \mathbf{d}_D[n-k]$$

❖ *y cada componente producirá una respuesta*

$$x[k] \mathbf{d}_D[n-k] \rightarrow x[k] h[n-k]$$

❖ *por lo que la respuesta global será:*

[9.15]

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]$$

¿qué sucede si a una secuencia cualquiera $x[n]$ se la multiplica por $\mathbf{d}_D[n-k]$?

□ Identificamos al sistema digital

➤ La versión analógica de estas ideas:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\mathbf{t}) h(t - \mathbf{t}) d\mathbf{t}$$

□ Integral de convolución con la “función” Delta de Dirac



Función de Transferencia

❖ calculando la transformada en z de la [9.15]:

[9.16]

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{k=\infty} y(kT) z^{-k}$$

❖ estamos en condiciones de **definir** la transferencia muestreada $D(z)$ como sigue:

[9.17]

$$Y(z) = D(z) X(z)$$

❖ donde se indica la relación que existe entre la TZ de la secuencia de salida y la TZ de la secuencia de entrada.

❖ $D(z)$ es un cociente de polinomios del tipo:

$$D(z) = \frac{\sum_{i=0}^{i=m} B_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{i=n} A_i z^{-i}} ; \text{ con } A_0 = 1$$

❖ que reemplazado en la [9.17] y anti-transformando dan lugar a una expresión ya conocida:



Filtros Digitales

[9.18]

$$y_{nT} = \sum_{i=0}^{i=m} B_i r_{(n-i)T} - \sum_{i=1}^{i=n} A_i y_{(n-i)T}$$

❖ *sistemas autorregresivos (AR)*

$$y_n = B_0 x_{(n)} + \sum_{i=1}^{i=n} A_i y_{(n-i)T}; \quad B_i = 0 \forall i > 0$$

❖ *sistemas de media móvil (MA) o FIR*

$$y_n = \sum_{i=0}^{i=m} B_i x_{(n-i)T}; \quad A_i = 0 \forall i$$

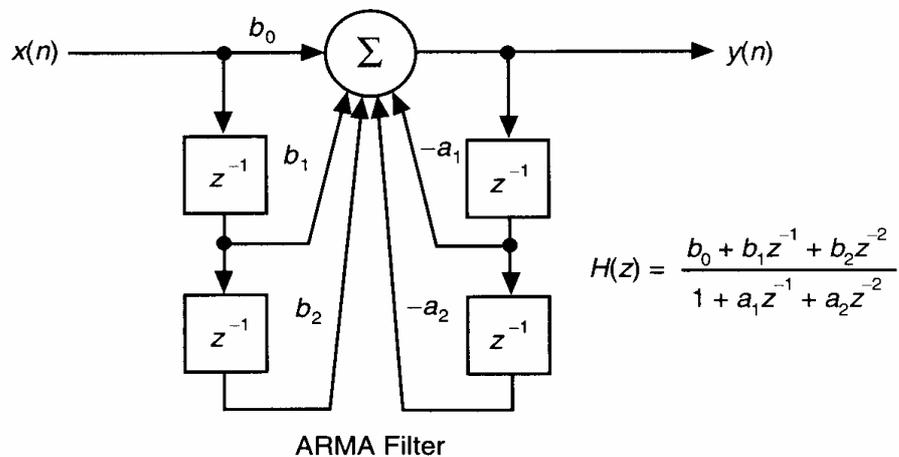
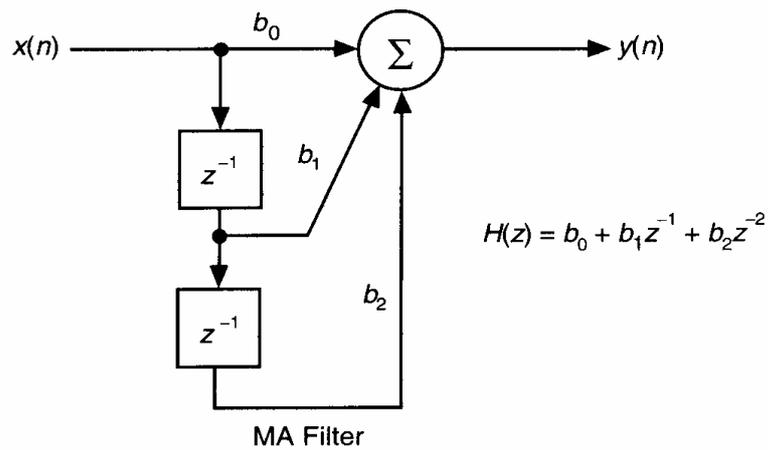
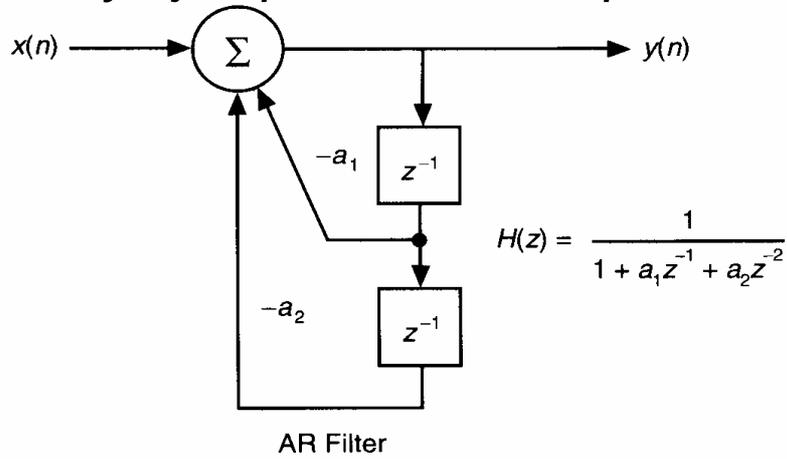
❖ *con ambos coeficientes: filtros ARMA*

❖ *es posible simular un filtro analógico con uno digital, aunque es posible obtener características que no pueden obtenerse con los analógicos (p.e. el FIR).*



Filtros Digitales

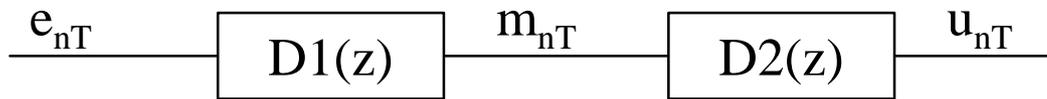
❖ Estructura y ejemplos de los 3 tipos de filtros:





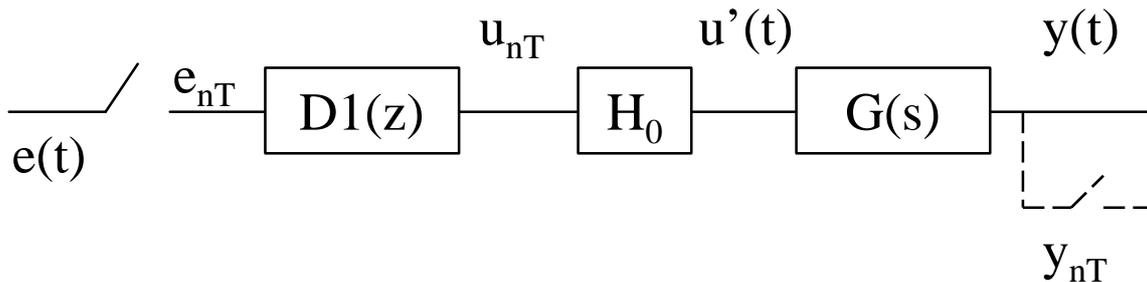
Interconexión A/D

1. De procesos digitales entre sí:



$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{M(z)}{E(z)} \frac{U(z)}{M(z)} = D_1(z)D_2(z)$$

2. De procesos digitales y analógicos a lazo abierto:



❖ *considerando una llave ficticia a la salida, puede plantearse:*

$$D_1(z) = \frac{U(z)}{E(z)}$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = Z[H_0(s)G(s)]$$

$$T(z) = \frac{Y(z)}{E(z)}$$



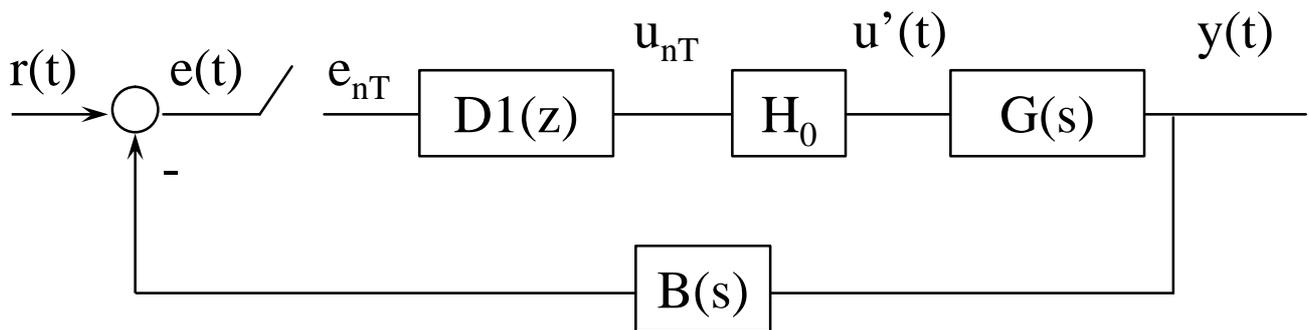
Interconexión

$$G(z) = Z\left[\frac{1 - e^{-sT}}{s} G(s)\right] = Z\left[\frac{G(s)}{s} - \frac{G(s)e^{-sT}}{s}\right]$$

$$G(z) = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

$$\therefore T(z) = D_1(z)(1 - z^{-1})Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

3. De procesos digitales y analógicos a lazo cerrado



❖ *la llave la reemplazamos por otras dos, una que muestrea la variable de salida y otra que muestrea la referencia:*

$$T(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)(GB(z))}$$

$$G(z) = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

$$GB(z) = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{G(s)B(s)}{s}\right]$$



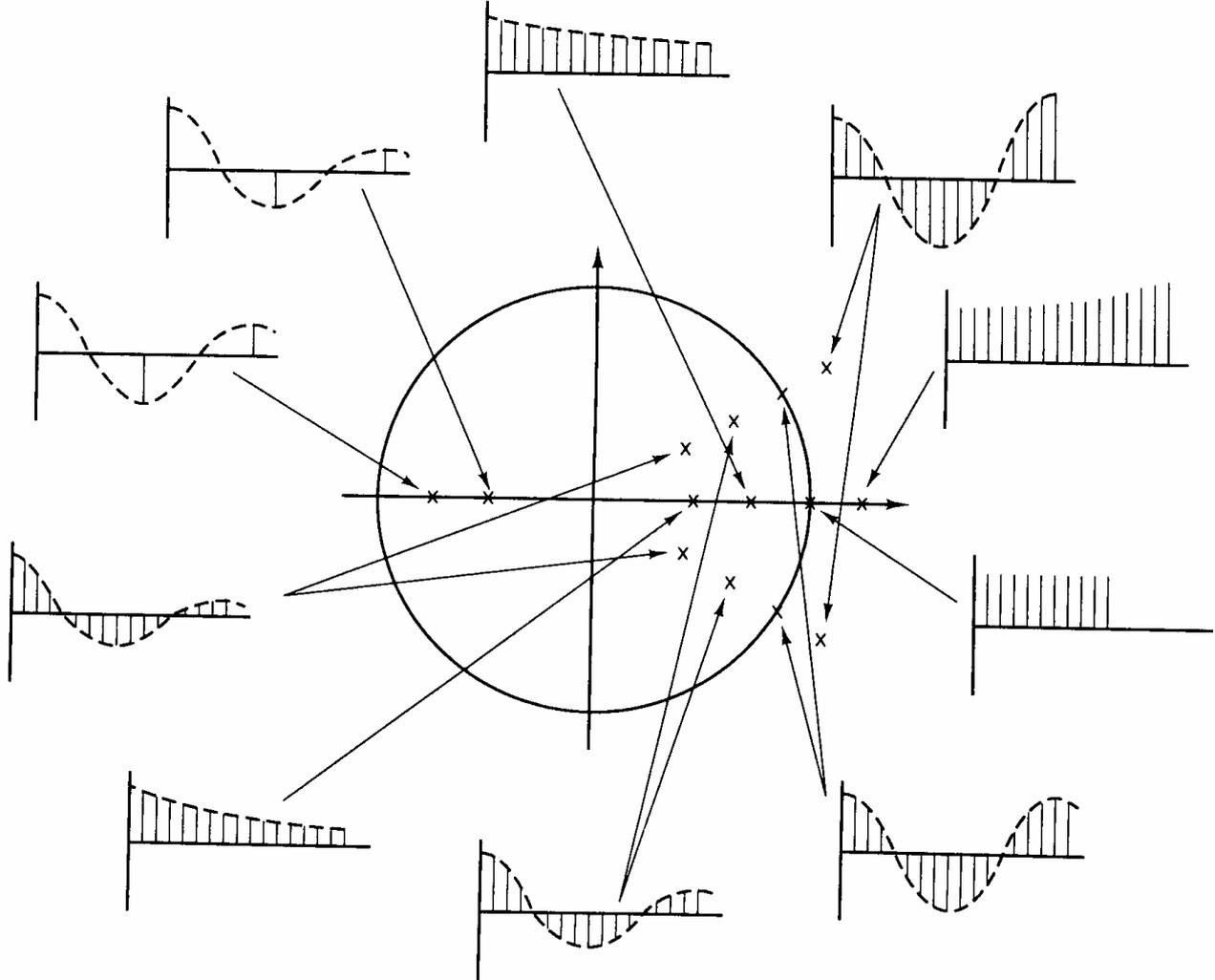
Características temporales



ÁREA DE ELECTRÓNICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
U.N.C.P.B.A.

➤ Respuesta al impulso de un sistema de segundo orden:

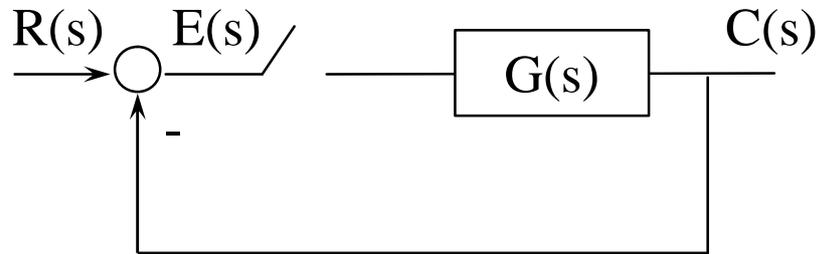
$$G(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} = \frac{w_n^2}{s_1 - s_2} z(e^{s_1 T} - e^{s_2 T})$$



❖ *nuevamente, conocida la ubicación de los polos en el pl. z es posible conocer el coeficiente de amortiguamiento, frecuencia natural no amortiguada, ...*



Error de estado estacionario



$$T(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)}; \text{ y } G(z) = \frac{k \prod_{i=1}^{i=m} (z - z_i)}{(z - 1)^N \prod_{j=1}^{j=p} (z - z_j)}; \text{ con } z_i \wedge z_j \neq 1$$

por conveniencia para el sig. desarrollo definimos:

$$K_c = \left. \frac{k \prod_{i=1}^{i=m} (z - z_i)}{\prod_{j=1}^{j=p} (z - z_j)} \right|_{z=1} \quad E(z) = R(z) - C(z) = R(z) - \frac{G(z)}{1 + G(z)} R(z) = \frac{R(z)}{1 + G(z)}$$

➤ analicemos para las distintas entradas:

❖ Escalón:

$$R(z) = \frac{z}{z - 1}$$

$$e_{ee}(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z - 1)R(z)}{1 + G(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z}{1 + G(z)}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + \lim_{z \rightarrow 1} G(z)}$$



Error de estado estacionario

➤ definimos la constante de error de posición como: $K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z)$

□ entonces si $N=0$, $K_p=K_c$ y $e_{ee} = \frac{1}{1+K_c}$

□ para $N \geq 1$, K_p es infinito y el error de estado estacionario a una excitación en escalón es 0

❖ *Rampa:* $e_{ee} = \frac{1}{K_v}$, con $K_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{T} (z-1)G(z)$

□ entonces si $N=0$, $K_v=0$ y el error de estado estacionario resulta infinito.

□ para $N=1$: $e_{ee} = \frac{T}{K_c}$

□ para $N \geq 2$, K_v es infinito y el error es 0

❖ *como se aprecia, el tratamiento es totalmente análogo a los sistemas de tiempo continuo.*

➤ **Estabilidad:**

❖ *depende del período de muestreo.*

❖ *Métodos como en tiempo continuo previa **transformación bilineal***

$$w = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

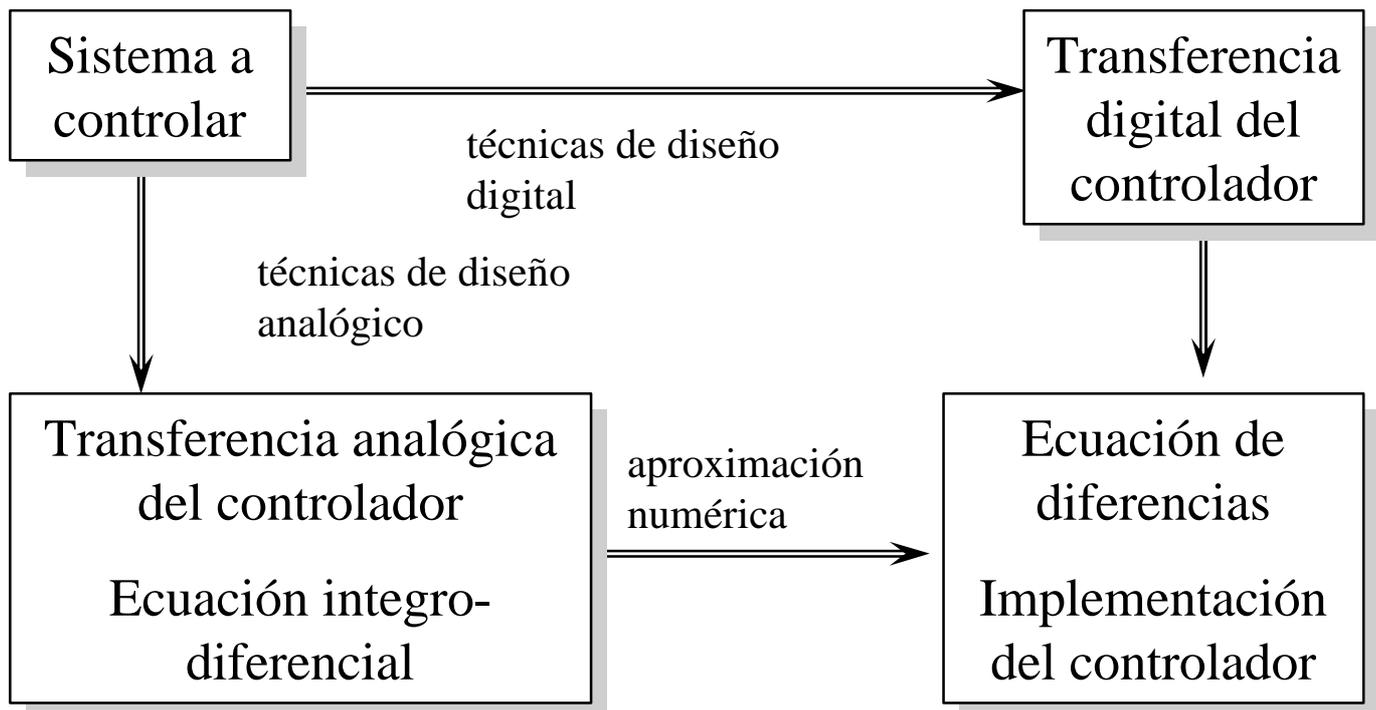


Diseño de Controladores Digitales



ÁREA DE ELECTRÓNICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
U.N.C.P.B.A.

- Los caminos para diseñar un controlador digital son:



- Técnicas analógicas discretizadas:
 - ❖ *PID DIGITAL*
- Técnicas digitales
 - ❖ *CONTROL DE TIEMPO MÍNIMO*



PID Digital

➤ Aproximaciones numéricas

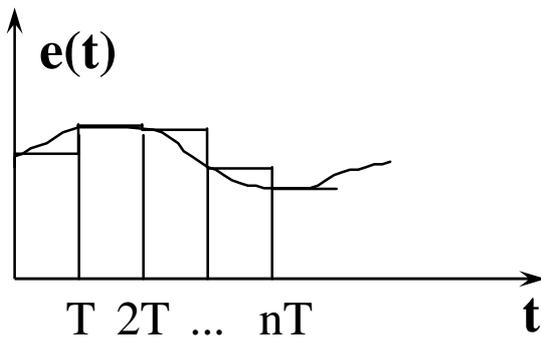
❖ *integral*

- regla rectangular o de Euler
- regla trapezoidal o de Tustin

❖ *derivada*

- hacia atrás

➤ Regla de Euler:



$$u_{nT} \cong T \sum_{i=0}^{i=n-1} e_{iT}$$

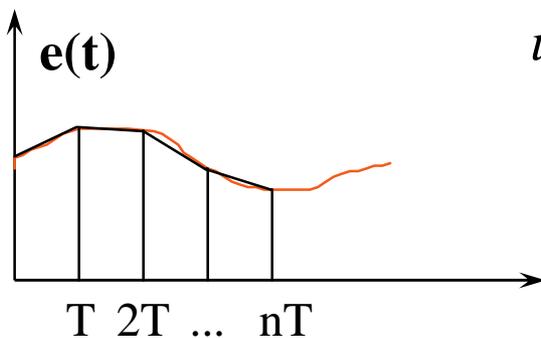
$$u_{nT} \cong T \sum_{i=0}^{i=n-2} e_{iT} + Te_{(n-1)T}$$

$$u_{nT} \cong u_{(n-1)T} + Te_{(n-1)T}$$

❖ *en Laplace:*

$$s \cong \frac{e^{sT} - 1}{T}$$

➤ Regla de Tustin: $u_{nT} \cong (T/2) \sum_{i=0}^{i=n-1} [e_{iT} + e_{(i+1)T}]$



$$u_{nT} \cong u_{(n-1)T} + (T/2)[e_{(n-1)T} + e_{nT}]$$

❖ *en Laplace:*

$$s \cong \frac{2e^{sT} - 1}{T e^{sT} + 1}$$



PID Digital

- Regla de derivación hacia atrás:

$$\frac{de(t)}{dt} = \frac{e(t) - e(t - T)}{T}$$

$$\left. \frac{de(t)}{dt} \right|_{t=nT} \cong \frac{e_{nT} - e_{(n-1)T}}{T}$$

- Algoritmo PID digital

$$u(t) = K_p \left\{ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right\}$$

- ❖ *regla de Euler + derivada hacia atrás:*

$$u_{nT} = u_{(n-1)T} + k_1 e_{nT} + k_2 e_{(n-1)T} + k_3 e_{(n-2)T}$$

donde

$$k_1 = K_p \left(1 + \frac{T_d}{T} \right)$$

$$k_2 = -K_p \left(1 + \frac{2T_d}{T} - \frac{T}{T_i} \right)$$

$$k_3 = K_p \left(\frac{T_d}{T} \right)$$



PID Digital

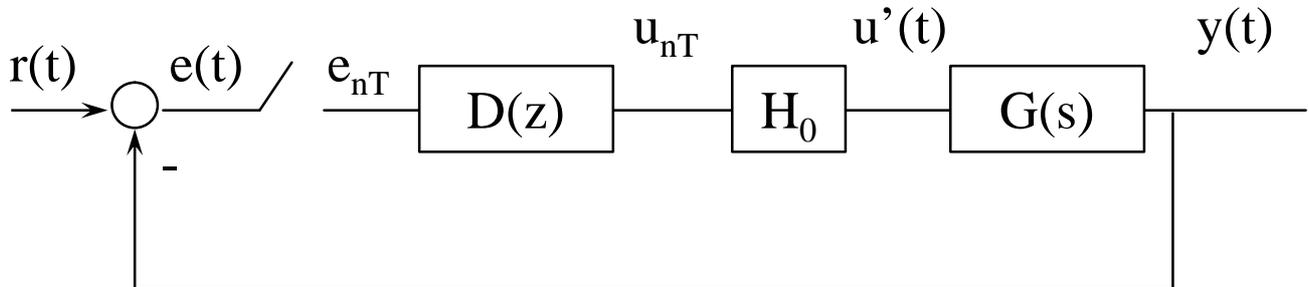
- Métodos de sintonía idénticos a los de tiempo continuo previa selección de T:
 - ❖ *Prueba-error sobre respuesta temporal*
 - ❖ *Clásico: lugar de raíces, margen de fase, ...*
 - ❖ *Ziegler-Nichols*
 - ❖ *Astrom-Hagglund*

- Idem algoritmos antireset-windup
 - ❖ *limitar término integral*
 - ❖ *eliminar acción integral durante saturación*
 - ❖ *restar al valor integrado una cantidad proporcional al exceso de actuación.*

$$u_{nT} = u_{(n-1)T} + k_1 T e_{(n-1)T} - k |u_{nT} - u_{\max}|$$



Controlador de Tiempo Mínimo



➤ Objetivos:

- ❖ *Todo el lazo de control sea FIR*
- ❖ *Error de Estado Estacionario = 0*
- ❖ *Señal de actuador $U(z)$ acotada a un máximo*

$$T(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)} \quad [1]$$

- ❖ *Para ser FIR:*

$$1 + D(z)G(z) = \frac{z^n}{pol(z)} \quad [2]$$

$$\therefore D(z) = \frac{z^n - pol(z)}{pol(z)} \cdot \frac{1}{G(z)} \quad [3]$$



Controlador de Tiempo Mínimo

❖ ¿cuánto vale este polinomio en z ?

❖ Lo calcularemos para que el $E_{ee}=0$

$$E(z) = R(z) - Y(z) = R(z)[1 - T(z)]$$

$$[2] \text{ en } [1]: \quad T(z) = \frac{z^n - \text{pol}(z)}{z^n}$$

$$\therefore E(z) = R(z) \frac{\text{pol}(z)}{z^n} \quad [4]$$

❖ Si por ejemplo la entrada es un escalón unitario:

$$R(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$E(z) = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{\text{pol}(z)}{z^n}$$

❖ Aplicando la propiedad del VF de la TZ:

$$e_{ee} = \lim_{n \rightarrow \infty} e_{nT} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \cdot \frac{z}{z-1} \cdot \frac{\text{pol}(z)}{z^n}$$



Controlador de Tiempo Mínimo

- ❖ *Entonces conviene que el polinomio en z tenga como factor a $(z-1)$*
- ❖ *Para ello, es condición suficiente que se elijan sus coeficientes a partir de la respuesta temporal discreta, de modo tal que:*

$$[5] \left\{ \begin{array}{l} pol(z) = a_0 z^n - a_1 z^{n-1} - a_2 z^{n-2} - \dots - a_n \\ \sum_{i=0}^n a_i = 0 \end{array} \right.$$

- con a_i = porción que se extingue el transitorio en la muestra i -ésima
- ❖ *La consideración final de la señal sobre el actuador se calcula con:*

$$U(z) = \frac{D(z)}{1 + D(z)G(z)} R(z) \quad [6]$$

- Una vez diseñado $D(z)$ se verifica que sea < que la cota U_{max}
- Si es mayor, aumentar n



Selección de la frecuencia de muestreo



ÁREA DE ELECTRÓNICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
U.N.C.P.B.A.

➤ límite superior de T

❖ *teorema del muestreo*

❖ *pérdida de información sobre señal muestreada*

❖ *efecto desestabilizador*

□ la planta es en general pasabajos y luego la salida filtra las componentes de alta frecuencia del reconstructor. El resultado:

- es un retardo puro de tiempo
- desestabilización de todo el sistema de control

□ solución:

$$H_0 = \frac{1 - e^{-sT}}{sT} \cong \frac{1 - 1 + sT - (sT)^2 / 2 + \dots}{sT} \cong 1 - \frac{sT}{2}$$

el aporte de fase a una pulsación ω , suponiendo T pequeño ($\omega T \ll 1$), es de:

$$\Phi = \arctg(-\omega T / 2) \cong -\omega T / 2$$

si queremos que no se introduzca mayor inestabilidad, diseñamos un MF de -5 a -15 grados, con lo cual:

$$\omega_{MF} T = 0,17 \text{ a } 0,52 \text{ rad}$$



Selección de la frecuencia de muestreo



ÁREA DE ELECTRÓNICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
U.N.C.P.B.A.

➤ límite inferior de T

❖ *velocidad de procesamiento del micro*

❖ *dificultades numéricas*

□ Control de acción integral

$$u_{nT} = u_{(n-1)T} + \frac{T}{T_i} e_{nT}$$

- actúa cuando el error es distinto de cero, pero vale cero alrededor de un intervalo $(-e, e)$

$$|e_{nT}| < \frac{T_i}{T} e$$

- conclusión: aumento de una zona muerta

□ Control de acción derivativa, cuya mínima variación es la cuantización efectuada

$$\frac{T_d}{T} (e_{(n-1)T} - e_{nT})$$

- Si T es muy pequeño, las variaciones son enormes



Selección de la frecuencia de muestreo



ÁREA DE ELECTRÓNICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
U.N.C.P.B.A.

- Ambos efectos anteriores se corrigen con aritmética de punto flotante
 - ❖ *Aunque significa mayor exigencia de almacenamiento y tiempo de cómputo*

- Otros factores a tener en cuenta:
 - ❖ *Espectro de perturbaciones*
 - ❖ *Respuestas en frecuencia de actuadores y sensores del lazo*

- Regla empírica:
 - ❖ *seleccionar T entre la sexta y vigésima parte del tiempo de crecimiento de la respuesta a un escalón del proceso a controlar*

