VARIABLE COMPLEJA

1) Representar en el plano complejo los conjuntos que satisfacen las siguientes relaciones:

a) $z+\bar{z}=4$

b) $|\mathrm{Im}(z)|<3$

c) $|z|=4$

d) $0<\mathrm{Re}(iz)<1$

e) $-5<\mathrm{Re}(z)\leq 1$

f) $\pi/6<\arg(z)<2/3\pi$

g) $|z-2i|>4$ y $0<\mathrm{Im}(z)<2$

h) $\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)<1$

i)

i) $|z-z_0|<R_2$

ii) $|z-z_0|>R_1$

iii) $|z-z_0|=0$

iv) $R_1<|z-z_0|<R_2$

con $z_0=x_0+iy_0$, $x_0\in R$, $y_0\in R$ $\quad 0<R_1<R_2\in R$

2) Representar las regiones por medio de ecuaciones o desigualdades en la variable z:

a) Los puntos que pertenecen a la circunferencia y al exterior del circulo de radio unitario centrado en $(-1-i)$.
b) Los puntos de una región anular centrada en $(3+i)$. El radio interior es 2 y el exterior es 4. Excluir los puntos de la frontera interior.

3) El conjunto resultante de la unión de los conjuntos:

$A=\{z/|z|<1\}$ y $B=\{z/\mathrm{Re}(z)>1\}$, ¿Es conexo?, ¿Es dominio?

4) Demostrar las siguientes propiedades:

a) $\cosh(iz)=\cos z$ b) $\mathrm{sen}(iz)=i\,\mathrm{senh}\,z$ c) $\cos(iz)=\cosh z$

5) Siendo $z=x+iy$, escribir las siguientes funciones en la forma: $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$

a) $f(z)=e^{z+2}$

b) $f(z)=\mathrm{senh}\,z$

c) $f(z)=\dfrac{1}{z}$

d) $f(z)=\mathrm{sen}\,z$

e) $f(z)=\cosh z$

f) $f(z)=2\bar{z}-2iz$

g) $f(z)=z+z^{-1}$

h) $f(z)=\cos z$

6) Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\operatorname{sen} z = 0$

b) $e^z = 1$

c) $\cos z = 2$

d) $\operatorname{senh} z = 2i$

7) ¿En que puntos del plano complejo se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann para la función compleja $f(z) = xy^2 + i\, x^2 y$?
¿En cuales existe f´(z)?
¿En que puntos la función es analítica?

8) Determinar si son o no analíticas las siguientes funciones . En caso afirmativo dar dominio de analiticidad y calcular sus derivadas:

a) $f(z) = \dfrac{1}{z}$

b) $f(z) = z^n, n = 2, 3, 7$

c) $f(z) = \bar{z}$

d) $f(z) = e^z$

e) $f(z) = \operatorname{Im}(z)$

f) $f(z) = (y+1)^2 + i\,(x+1)^2$

g) $f(z) = \cosh z$

h) $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i\,(3x^2 y - y^3)$

i) $f(z) = \operatorname{sen} z$

j) $f(z) = \ln z,\ r > 0, -\pi < \theta < \pi$

9) Probar que las siguientes funciones son armónicas. Luego obtener la función analítica que tiene a *u* como parte real.

a) $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$

b) $u(x, y) = \cosh y \operatorname{sen} x$

c) Elegir la constante *a* de tal manera que la función $u(x, y) = x^3 + axy^2$ sea armónica y luego hallar una función conjugada, *v*.

10) Graficar el conjunto $A \subset C$ y su imagen debida a $f(z)$:

a) $A = \{z / \operatorname{Im}(z) = 2\operatorname{Re}(z) + 4\}$ $\quad f(z) = 2z + 6$

b) $A = \{z / \operatorname{Re}(z) > 0\}$ $\quad f(z) = i(1 + z)$

c) $A = \{z / \operatorname{Re}(z) > 0 \wedge 0 \le \operatorname{Im}(z) \le 2\}$ $\quad f(z) = 1 + iz$
Trazar gráficamente las rectas tangentes a la curvas y comprobar que la transformación es conforme en $z = 0$

d) $A = \{z / \operatorname{Im}(z) \ge 0 \wedge 1 \le |z| \le 2\}$ $\quad f(z) = \dfrac{1}{z}$

e) $A = \left\{ z \,/\, \mathrm{Re}(z) > 0 \wedge \frac{1}{2} \le \mathrm{Im}(z) \le 1 \right\}$ $f(z) = \frac{-i}{z}$

f) $A = \{ z \,/\, \mathrm{Im}(z) > 0 \wedge |z| < 1 \}$ $f(z) = 1 + \frac{1}{z}$

g) $A = \{ z \,/\, |z - 3| = 2 \}$ $f(z) = \frac{1}{z}$

h) $A = \left\{ z \,/\, |z| < 4 \wedge 0 < \arg(z) < \frac{\pi}{3} \right\}$ $f(z) = z^2$

i) $A = \{ z \,/\, |z - 2i| < |z| \}$ $f(z) = z^2$

j) $A = \left\{ z \,/\, |z| < 2 \wedge 0 < \arg(z) < \frac{\pi}{4} \right\}$ $f(z) = z^5$

k) $A = \{ z \,/\, 0 \le \mathrm{Re}(z) \le 1 \wedge 0 \le \mathrm{Im}(z) \le 1 \}$ $f(z) = e^z$

l) $A = \{ z \,/\, |z - 3i| \le 2 \wedge |z - 4| \le |z + 2| \}$ $f(z) = -i\,z - \frac{1}{2}$

m) $A = \left\{ z \,/\, x < 0 \wedge \frac{1}{2} < y < 1 \right\}$ $f(z) = \frac{1}{z}$

Trazar gráficamente las rectas tangentes a las curvas y verificar que se conserva el ángulo en el punto z = i

11) Probar que bajo la transformación $w = \operatorname{sen} z$, la faja $0 \le x < \frac{\pi}{2}$, $y \ge 0$, se transforma en el primer cuadrante.

12) Determinar los ceros y las singularidades de las siguientes funciones. Clasificar las singularidades y calcular sus residuos en los casos posibles.

a) $f(z) = \frac{z+1}{z^3(z^2 + z)}$

b) $f(z) = \frac{z^2 - 3z}{(z^2 - 9)(z + 2)}$

c) $f(z) = z^2 \operatorname{sen} z$

d) $f(z) = \frac{z^5}{z^3 - z}$

e) $f(z) = (z - \pi)^5 \cos \frac{1}{z - \pi}$

f) $f(z) = \frac{\cos z}{z}$

g) $f(z) = \frac{z}{1 - e^z}$

h) $f(z) = \frac{e^{-i\pi z}}{(\operatorname{sen} z - i)(z + i)}$

13) Determinar el dominio de analiticidad de la función *f* y aplicar el Teorema de Cauchy para demostrar que $\oint_{\gamma} f(z)\,dz = 0$ cuando el entorno cerrado es $\gamma : |z+i| = 1$

a) $f(z) = \dfrac{e^z}{(z+2)^3(z+1)}$

b) $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2(z-2+i)}$

14) Calcular las siguientes integrales

a) $\oint_C \dfrac{e^z}{z-1}$ $\quad C_1 : |z-3| = 1$ $\quad C_2 : |z| = 2$

b) $\oint_c \dfrac{e^{4zi}\ dz}{z^2 - i\,z}$ $\quad C : |z-i| = 3$

c) $\oint_c \dfrac{e^{3z\ i} dz}{(z-1)^2 z}$ $\quad C : |z-1| = 2$

d) $\oint_c \dfrac{\cos \pi z\ dz}{z^2 - 1}$ C: es el contorno de un rectángulo con vértices 3 i, -3 i, -2 + 3 i, -2 – 3i

e) $\oint_C \dfrac{dz}{4+z^2}$ $\quad C_1 : |z-i| = 2$ $\quad C_2 : |z| = 3$ $\quad C_3 : |z| = 1$

f) $\oint_C \dfrac{\operatorname{sen}(z)}{z^2}\, dz$ $\quad C : |z| = 1$

g) $\oint_C \dfrac{e^z - 1}{z^3} dz$ $\quad C : |z| = 2$

h) $\oint_C \dfrac{e^z}{z^2(z-i)^3}\, dz$ $\quad C_1 : |z| = 2^n \quad$ con $n = \dfrac{1}{2}, 1$ $\quad C_2 : |z-i| = \dfrac{1}{2}$

i) $\oint_C \dfrac{\cos(z)}{z(z-1)(z+2)^2}\, dz$ $\quad C : |z-1| = \dfrac{1}{2}$

15) Encontrar la representación de la serie de potencias de la función $f(z)=\dfrac{1}{z-i}$ en las regiones:

a) $|z|<1$

b) $|z|>1$

16) Encontrar la representación de la serie de potencias de la función $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$ en el disco $|z|<1$.

17) Calcular los siguientes desarrollos en serie de potencias:

a) $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$ en $|z|<2$, $2<|z|<3$, $|z|>3$

b) $f(z)=\dfrac{-1}{(z-1)(z-2)}$ en $1<|z|<2$, $|z|>2$, $0<|z-2|<1$

18) Calcular el desarrollo en serie de Laurent de las siguientes funciones:

a) $f(z)=\dfrac{1}{z^2-2z-3}$ en potencias de z de modo que sea convergente en $z=2$

b) $f(z)=\dfrac{2z+1}{z^2-6z+5}$ en potencias de z de modo que sea convergente en $z=-8$

c) $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z+2)}$ en potencias de $(z-1)$ de modo que sea válida en un dominio anular que contenga el punto $z=\dfrac{7}{2}$. Determinar el dominio en el que la serie converge a $f(z)$

19) Calcular el desarrollo en serie de Laurent de las siguientes funciones alrededor de sus singularidades, clasificarlas y dar su residuo:

a) $f(z)=\dfrac{1}{z^2-z^3}$

b) $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2}$

c) $f(z)=\dfrac{\operatorname{sen} z}{z^2}$

d) $f(z)=\dfrac{\cos(z-\pi)}{(z-\pi)}$

e) $f(z)=\dfrac{e^z-e^2}{(z-2)}$

f) $f(z)=\dfrac{e^{-3z}}{(z-2)^6}$ $|z-2|>0$

20) Hallar el desarrollo en serie de potencias de las funciones dadas en los dominios indicados. En caso de ser posible, clasificar la singularidad y hallar el residuo.

a) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + z}$ $\qquad g_1 : |z-1| < 1 \quad , \quad g_2 : 1 < |z-1| < 2$

b) $f(z) = \dfrac{1}{z(z-2)}$ $\qquad 1 < |z-3| < 3$

21) Calcular las siguientes integrales aplicando el teorema de los residuos:

a) $\oint_C \dfrac{z}{(z-1)(z-3)}\, dz$ $\qquad C : |z| = 4$

b) $\oint_C \dfrac{\cos(z)}{z(z-1)(z+2)^2}\, dz$ $\qquad C : |z-1| = \dfrac{1}{2}$

c) $\oint_C \dfrac{e^z - 1}{z^3}\, dz$ $\qquad C : |z| = 2$

d) $\oint_C \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{z+1}\, dz$ $\qquad C : |z| = \dfrac{1}{2}$

e) Resolver utilizando el Teorema de los residuos los incisos b y c del ejercicio 16.