ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

1) En cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales establecer si es ordinaria o parcial, proporcionar el orden e indicar las variables independientes y dependientes; en caso de ser ordinaria, si es lineal o no lineal:

a) $3xdy - ydx = 0$

b) $x - y'' = e^x (y')^2$

c) $8y^{IV} = x(1-x)$

d) $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$

e) $x\,y'' + y' + x\,y = 0$

f) $\sqrt{1-y}\,y'' + 2xy' = 0$

2)

a) Escriba el dominio de la función $y = x^{\frac{2}{3}}$

b) Describa el intervalo de definición I en el que $y = x^{\frac{2}{3}}$ es una solución de $3xy' - 2y = 0$

3) Verificar que la función dada es una solución de la ecuación diferencial que la acompaña y especificar el o los intervalos en que este es el caso:

a) $y = (1+x^2)^{-1}$ $\qquad y' = -2xy^2$

b) $y = x^2 - x^{-1}$ $\qquad y'' - \dfrac{2}{x^2}\,y = 0$

c) $y^2 - x^3 + 8 = 0$ $\qquad y' = \dfrac{3x^2}{2y}$

4) Verificar que las funciones propuestas son soluciones de la ecuación diferencial $y = xy' + (y')^2$, indicar su tipo:

$y = Cx + C^2$, $\qquad y = 0$, $\qquad y = -x^2/4$

5) Encontrar una solución singular en los siguientes problemas:

a) $\dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{1-y^2}$

b) $(e^x + e^{-x})\dfrac{dy}{dx} = y^2$

6) Encontrar las ecuaciones diferenciales asociadas a las siguientes familias de curvas planas:

a) $y^2 + Cx^2 = x$ $\qquad$ b) $y = kx^4$ $\qquad$ c) $y = e^{kx}$ $\qquad$ d) $y^2 = kx$

7)

a) Enunciar el teorema de existencia y unicidad de soluciones de un PVI.

b) Determinar si el Teorema de existencia y unicidad se aplica en los siguientes casos. Analizar la existencia, y una vez establecida, analizar la unicidad.

i) $\begin{cases} y' - yx^2 = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} y' = \dfrac{2-x}{x+y} \\ y(1) = -1 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} y' = xy^{\frac{1}{3}} \\ y(1) = 0 \end{cases}$

iv) $\begin{cases} y' = \sqrt{x-y} \\ y(2) = 2 \end{cases}$

v) $\begin{cases} y' = \dfrac{x}{y} \\ y(2) = 0 \end{cases}$

vi) $\begin{cases} 2yy' = -1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$

vii) Modificar las condiciones iniciales en los incisos ii) y iii) para que el teorema sea aplicable.

8) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}$

b) $(1 + \ln y)dt + \dfrac{t}{y}dy = 0$

c) $(2xy^3 + 1)dx + (3x^2y^2 - y^{-1})dy = 0$

d) $xy\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 + y^2}{1 + x^2}(1 + x^2 + x)$

e) $y\dfrac{dx}{dy} + 2x = 5y^3$

f) $\sqrt{x+1}\dfrac{dy}{dx} = -y\ln^3 y$

g) $(2x - y)dx + (4x + y - 3)dy = 0$

h) $(2x + y + 4)dx + (x - 2y - 2)dy = 0$

i) $\dfrac{dy}{dx} + y = e^x y^{-2}$

j) $(x^4 - x + y)dx - x\,dy = 0$

k) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x-2} = 5(x-2)y^{1/2}$

l) $\dfrac{dy}{dx} = x^2 e^{-4x} - 4y$

m) $(2xy + 3x^2)dx + x^2 dy = 0$

n) $x^2 y' - xy = x^2 e^{\frac{y}{x}}$, $y(1) = 0$

o) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 + x\sqrt{x^2 + y^2}}{xy}$

p) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y(\ln y - \ln x + 1)}{x}$

q) $(3x^2y^4 + 2xy)dx + (2x^3y^3 - x^2)dy = 0$

r) $(\arctan y + \cos(x + 2y))dx + \left(\dfrac{x}{1 + y^2} + 2\cos(x + 2y) + y\right)dy = 0$

s) $\left(1+x^4\right)dy + x\left(1+4y^2\right)dx = 0, \quad y(1) = 0$

t) $\sqrt{1-y^2}\,dx - \sqrt{1-x^2}\,dy = 0, \quad y(0) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

u) $\left(e^x \operatorname{sen} y - 3x^2\right)dx + \left(e^x \cos y + \dfrac{y^{(-2/3)}}{3}\right)dy = 0$

9) Verificar que el factor propuesto es integrante y resolver la ecuación:

a) $\left(-xy\operatorname{sen}x + 2y\cos x\right)dx + 2x\cos x\,dy = 0 \qquad \mu(x,y) = xy$

b) $\left(x^2 + 2xy - y^2\right)dx + \left(y^2 + 2xy - x^2\right)dy = 0 \qquad \mu(x,y) = (x+y)^{-2}$

10) Encontrar un factor integrante de la forma $x^n y^m$ y resolver:

a) $\left(2y^2 - 6xy\right)dx + \left(3xy - 4x^2\right)dy = 0$

b) $\left(12 + 5xy\right)dx + \left(6xy^{-1} + 3x^2\right)dy = 0$

11) Determinar el valor de k para que la ecuación diferencial correspondiente sea exacta:

a) $\left(y^3 + k\,xy^4 - 2x\right)dx + \left(3xy^2 + 20x^2y^3\right)dy = 0$

b) $\left(6xy^3 + \cos y\right)dx + \left(2k\,x^2y^2 - x\operatorname{sen}y\right)dy = 0$

12) Determinar las funciones M(x,y) y N(x,y) tales que cada ecuación diferencial sea exacta:

a) $M(x,y)dx + \left(xe^{xy} + 2xy + \dfrac{1}{x}\right)dy = 0$

b) $\left(x^{-1/2}y^{1/2} + \dfrac{x}{x^2+y}\right)dx + N(x,y)dy = 0$

13) Determinar una solución continua que satisfaga la ecuación diferencial dada en los siguientes problemas:

a) $\dfrac{dy}{dx} + 2x = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}, \quad y(0) = 0$

b) $\left(1+x^2\right)\dfrac{dy}{dx} + 2xy = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ -x, & x \ge 1 \end{cases}, \quad y(0) = 0$

14) Determinar si el Teorema de existencia y unicidad se aplica en los siguientes casos. Si tienen soluciones, calcularlas.

a) $\begin{cases} y' = \left(1-y^2\right)^{1/2} \\ y(0)=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y' = y\,u(t) \\ y(0)=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y' = 3y^{2/3} \\ y(0)=0 \end{cases}$

Determinar fórmulas para un número infinito de soluciones en $-\infty < t < \infty$.

15) Aplicar el método de aproximación sucesivas de Picard para calcular $Y_n(x)$ para $n \le 4$:

a) $y' = x^2 + y^2$, $y(0)=0$

c) $y' = xy$, $y(0)=2$

b) $y' + y\,\mathrm{ch}\,x = 0$, $y(0)=1$

d) $y' = e^{2x} + y - 1$, $y(0)=1$

16) Obtener las iteraciones de Picard $y_0(t), y_1(t), \cdots, y_4(t)$ para el PVI $y' = y, y(0)=1$. Demostrar que $y_4(t)$ consta de los primeros cinco términos de la serie de Taylor para la solución $y = e^t$.

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Problemas Geométricos

Ciertas magnitudes relacionadas con una función $f(x)$, como la pendiente y el radio de curvatura se expresan en función de las derivadas. Una ecuación en la que intervienen estas magnitudes diremos que es una ecuación diferencial.
Si $P(x,y)$ es un punto de la recta perteneciente a dicha curva, expresamos:

$\dfrac{dy}{dx}$ a la pendiente de la recta tangente a la curva en $P(x,y)$.

$-\dfrac{dx}{dy}$ a la pendiente de la recta normal (perpendicular a la recta tangente) en el punto $P(x,y)$.

17) Hallar la curva que satisface la condición geométrica: la pendiente de la gráfica de $f(x)$ en un punto genérico (x,y) es la suma de x e y, y pasa por el punto $(0,-1)$.

18) Hallar las curvas tales que la ordenada al origen de su tangente en un punto genérico (x,y) sea igual a $2x$.

19) Una curva arranca desde el origen por el primer cuadrante. El área bajo la curva desde $(0{,}0)$ hasta (x, y) es un tercio del área del rectángulo que tiene a esos puntos como vértices opuestos. Hallar la ecuación de esa curva.

20) Una bola de nieve se funde de modo que la razón de cambio en su volumen es proporcional al área de su superficie. Si la bola de nieve tenía inicialmente 4 pulgada de diámetro y 30 min después tenía 3 pulgadas., ¿en qué momento tendrá un diámetro de 2 pulgadas?. Desde el punto de vista matemático, ¿en que momento desaparecerá la bola de nieve?

Trayectorias Ortogonales

Definición: Cuando todas las curvas de una familia $G(x,y, C)=0$ cortan ortogonalmente a todas las curvas de otra familia $H(x,y, D)=0$, se dice que las familias son trayectorias ortogonales entre sí : Si $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ es la ecuación diferencial de una familia, la ecuación diferencial de sus trayectorias ortogonales es:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{f(x,y)}$$

21) Hallar la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales de las siguientes familias de curvas
   a) $x^2+y^2-2cx=0$
   b) $xy=c$
   c) Muestre que las familias $x^2+4y^2=C_1$; $y=C_2x^4$ son ortogonales.

Problemas de enfriamiento y calentamiento

De acuerdo con la ley de enfriamiento de Newton, la tasa de cambio con respecto al tiempo $T(t)$ de un cuerpo inmerso en un medio de temperatura constante T_m es proporcional a la diferencia, esto es:

$$\frac{dT}{dt}=K(T-T_m)$$

T_m : Temperatura constante del medio ambiente.
K : Constante de proporcionalidad.

22) Agua a una temperatura de $100^\circ C$ se enfría en 10 minutos a $80^\circ C$ en un cuarto con temperatura de $25^\circ C$.
   a) Encuentre la temperatura del agua después de 20 minutos.
   b) Cuándo la temperatura será de $40^\circ C$.

23) Una taza de café caliente, inicialmente a 95ºC, se enfría hasta 80ºC en 5 min, al estar en un cuarto con temperatura de 21ºC. Use solo la ley de enfriamiento de Newton y determine el momento en que la temperatura del café estará a unos agradables 50ºC.

24) Una olla de sopa, inicialmente hirviendo, se enfría en aire a 0°C., y a los 30 minutos está a una temperatura de 20°C. ¿Cuánto se enfriará en los siguientes 30 minutos?

25) La temperatura máxima que puede leerse en un termómetro es 110°F. Cuando el termómetro marca 36°F se coloca en un horno. Después de 1 minuto y 2 minutos respectivamente marca 60°F y 82°F . ¿Cuál es la temperatura del horno?

Crecimientos y Decaimientos Naturales

Crecimiento de Población

Supongamos que $P(t)$ es el número de individuos de una población (de humanos, insectos o bacterias) que tiene índices constantes de naturalidad y mortalidad β y δ, respectivamente (en nacimientos y muertes por unidad de tiempo). Entonces durante un corto intervalo Δt, ocurren unos $\beta P(t) \Delta t$ nacimientos y $\delta P(t) \Delta t$ muertes; así que la tasa de cambio en $P(t)$ está dado por:

$$\frac{dP}{dt} = (\beta - \delta) P \qquad (1)$$

26) Bacterias en un cierto cultivo incrementan a una tasa proporcional al número presente. Si el número original si incrementa en un $50\,\%$ en media hora. ¿En cuánto tiempo se espera tener tres veces el número original?

27) La población de una ciudad minera crece a un ritmo proporcional a dicha población. En dos años la población se ha duplicado y un año más tarde había 10000 habitantes. ¿Cuál era la población inicial?

28) En una cierta solución hay 2 grs de un químico. Después de una hora hay 3 grs del químico. Si la tasa de incremento del químico es proporcional a la raíz cuadrada del tiempo que ha estado en la solución, ¿Cuántos grs habrá después de cuatro horas?

29) Se espera que la población del mundo se duplique en los siguientes 30 años. ¿Cuál es la tasa de crecimiento?

30) Supongamos que una sustancia decrece a una tasa que es inversamente proporcional a la cantidad presente. Si inicialmente hay 12 unidades presentes y 8 unidades están presentes después de 2 días. ¿ Cuánto tiempo tomará para desaparecer la sustancia?.

Decaimiento Radiactivo

Imaginemos una muestra de sustancia que contiene $N(t)$ átomos de cierto isótopo radiactivo al tiempo t. Se ha observado que una fracción constante de esos átomos se desintegra espontáneamente (transformándose en átomos de otros elementos o en otro isótopo del mismo elemento) durante cada unidad de tiempo. Por consiguiente, la muestra llega a comportarse como una población con índice constante de mortandad pero donde no ocurren nacimientos. Para escribir un modelo de $N(t)$, usamos la ecuación diferencial (1) con $N(t)$ en lugar de $P(t)$ y con $\beta = 0$ y en lugar de δ usaremos k, con $k > 0$ (k depende del isótopo radioactivo particular):

$$\frac{dN}{dt} = -k\,N$$

La vida media T de un isótopo radiactivo es el tiempo requerido para que la mitad de él se desintegre.

31) Una sustancia radiactiva se desintegra a una razón proporcional a la masa presente al tiempo t. Al tiempo cero habrá 2 grs de la sustancia. En 80 años habrá 1,7 grs.
   a) ¿Cuántos grs habrá en 200 años?
   b) ¿En cuántos años quedará exactamente 1 gr de la sustancia?

32) Encuentre la vida media de una sustancia radiactiva si el 25% de ésta desaparece en 10 años

33) Un reactor transforma el uranio 238, que es relativamente estable, en el isótopo plutonio 239. Después de 15 años se determina que 0.043% de la cantidad inicial N_0 de plutonio se ha desintegrado. Determine la semivida de este isótopo si la rapidez de desintegración es proporcional a la cantidad presente.

34) La vida media del cobalto radiactivo es de 5,27 años. Suponga que un accidente nuclear ha dejado el nivel de radiación de cobalto en una cierta región 80 veces superior al nivel aceptable para la vida humana. ¿Cuántos años deberán pasar hasta que la región se vuelva habitable?

35) Si el 30% de una sustancia radiactiva desaparece en 10 días, ¿En cuánto tiempo desaparecerá el 90%?

Problemas de mezcla

Consideremos un tanque que tiene una solución (mezcla de soluto y solvente) como por ejemplo, una sal disuelta en agua. Hay un flujo tanto de entrada como de salida, queremos calcular la cantidad $X(t)$ de soluto que hay en el tiempo t en función de la cantidad $X(0) = X_0$ al momento t = 0. Supóngase que la solución tiene una concentración c, gr/litro cuando fluye hacia el tanque con una tasa constante r_i, en litro/seg en tanto que la contenida en el tanque (que se mantiene bien mezclada mediante agitamiento) fluye hacia fuera a una tasa constante r_o, en litro/seg.
La cantidad de soluto que fluye hacia el tanque durante Δt segundos es:

$$\left(r_i \frac{\text{litros}}{\text{segundos}}\right)\left(c_i \frac{\text{gra mos}}{\text{litros}}\right)(\Delta t \text{ segundos})$$

y produce una cantidad medida en gramos.
La cantidad de soluto que fluye hacia fuera del tanque durante el mismo intervalo de tiempo depende de la concentración $c_0(t)$ en el tanque al instante t

$$c_0 = \frac{X(t)}{V(t)}$$

donde $$V(t) = V(0) + (r_i - r_0)t$$

es el volumen de la solución en el tanque al instante t.
Entonces la ecuación diferencial es:

$$\frac{dX}{dt} = r_i\, c_i - r_0\, \frac{X}{V}$$

36) Un tanque está lleno con 8 gal de agua salada en la cual 2 Lb de sal están disueltas. Agua salada con 3 Lb de sal por galón entra al tanque a 4 gal/min y la mezcla bien agitada sale a la misma tasa.
   a) Establecer una ecuación diferencial, para la cantidad de sal como una función del tiempo.
   b) Encontrar la cantidad de sal como una función del tiempo,
   c) Encontrar la concentración de sal después de 8 minutos.
   d) ¿Cuánta sal hay después de un tiempo largo?.

37) Un tanque bien mezclado contiene 300 gal de agua con una concentración de sal de 0,2 Lb/gal. Agua con una concentración de sal de 0,4 Lb/gal entra a una tasa de 2 gal/min. Una válvula abierta permite que el agua salga del tanque a la misma tasa. Determinar la cantidad y la concentración de sal en el tanque como una función del tiempo.

38) Un tanque tiene 40 gal de agua pura. Una solución de agua salada con 1 Lb de sal por galón entra a 2 gal/min y la mezcla bien agitada sale a la misma tasa.
   a) ¿ Cuánta sal hay en el tanque en cualquier tiempo?.
   b) ¿ Cuándo el agua que sale tendrá 1/2 Lb de sal por galón?.

39) Un tanque tiene 60 gal de agua salada con 2 Lb de sal por galón. Una solución con 3 Lb de sal por galón entra a 2 gal/min y la mezcla sale a la misma tasa. ¿ Cuándo habrá 150 Lb de sal en el tanque?.

40) Un tanque tiene 100 gal de agua salada con 40 Lb de sal disuelta. Agua pura entra a 2 gal/min y sale con la misma tasa.
   a) ¿Cuándo la concentración de sal será de 0,2 Lb/gal?
   b) ¿Cuándo la concentración será menor que0,01 Lb/gal?

41) Un tanque tiene 10 gal de agua salada con 2 Lb de sal disueltas. Agua salada con 1,5 Lb de sal por galón entra a 3 gal/min y la mezcla bien agitada sale a 4 gal/min.
   a) Encontrar la cantidad de sal en el tanque en cualquier tiempo.
   b) Encontrar la concentración de sal después de 10 minutos.
   c) Dibujar gráficas de la cantidad y concentración de sal contra el tiempo y obtenga el máximo en cada caso.

42) Un tanque tiene 60 gal de agua pura. Una solución con 3 Lb de sal por galón entra a 2 gal/min y sale a 2,5 gal/min.
   a) Encontrar la concentración de sal en el tanque en cualquier tiempo.
   b) Encontrar la concentración de sal cuando el tanque tenga 30 gal de agua salada.
   c) Encontrar la cantidad de agua en el tanque cuando se tenga la máxima concentración.

d) Determinar la máxima cantidad de sal presente en cualquier tiempo.

43) Un tanque de 500 gal contiene inicialmente 100 gal de solución salina en la que se han disuelto 5 Lb de sal. Se agrega solución salina que contiene 2 Lb/gal a razón de 5 gal/min y la mezcla sale del tanque a razón de3 gal/min.

a) Determinar cuánta sal hay en el tanque al momento que éste se desborda.
b) Expresar la ecuación diferencial correspondiente para la cantidad de sal después que se desborda.

44) Dos tanques se colocan en posición de cascada como se muestra en el diagrama:

El tanque 1 contiene inicialmente 20 Lb de sal disueltas en 100 gal de salmuera y el tanque 2 contiene en un principio 150 gal de solución salina en la que se han disuelto 90 Lb de sal. Al tiempo cero, se agrega al tanque 1 una solución salina que contiene 1/2 Lb de sal por galón a razón de 5 gal/min. El tanque 1 tiene una salina que descarga solución en el tanque 2 a razón de 5 gal/min y el tanque 2 tiene asimismo una salida de 5 gal/min.

a) Determinar la cantidad de sal que hay en cada tanque para cualquier tiempo $t \geq 0$.
b) Determinar cuando será mínima la concentración de sal en el tanque 2 y cuánta sal hay en el tanque en ese momento.

45) La sangre conduce un medicamento a un órgano a razón de 3 cm^3/s y sale con la misma razón. El órgano tiene un volumen de líquido de 125 cm^3. Si la concentración del medicamento en la sangre que entra al órgano es de 0.2 g/cm^3, ¿cuál es la concentración del medicamento en el órgano en el instante t, si inicialmente no había rastros de ese medicamento? ¿en que momento llegara la concentración del medicamento en el órgano a 0.1 g/cm^3?

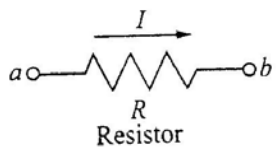
46) Un tanque de 250 gal está inicialmente lleno hasta la mitad con agua pura. Se agrega agua que contiene $0{,}1\,\text{lb}/\text{gal}$ de sal a una tasa de $5\,\text{gal}/\text{min}$. El contenido bien mezclado del tanque fluye hacia afuera por una tubería a una tasa de $2\,\text{gal}/\text{min}$. Cuando el tanque está lleno, se derrama.

a) Cuánto tarda en derramarse?

b) Hallar la cantidad de sal que hay en el tanque después de t minutos, antes de derramarse.
c) Plantear una nueva ecuación diferencial que exprese la variación de sal en el tiempo válido cuando se produce el derrame. Justificar el planteo efectuado.

Circuitos Eléctricos

Elementos de un circuito



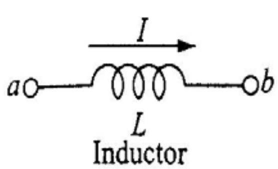
RESISTOR

Cuando la corriente fluye por un segmento de circuito se pierde energía eléctrica, de modo que el potencial en un extremo es menor que el potencial en el otro extremo. Un segmento de circuito entre los puntos a y b donde se pierde mucha energía se llama resistor. Los elementos de calentamiento y los filamentos de las lámparas son buenos resistores y convierten la energía eléctrica en en calor y luz.
La caída de voltaje a través de un resistor y la corriente que fluye por él son modelados por la ley de Ohm.

Ley de Ohm: La caída de voltaje V_{ab} entre los extremos a y b de un resistor es proporcional a la corriente I que fluye por el resistor:

$V_{ab} = RI$

La constante R se conoce como la resistencia del resistor.
La resistencia se mide en ohms, que se denota con la letra griega Ω, si la corriente se mide en amperes y l voltaje en volts.



INDUCTOR

Una corriente eléctrica cambiante I(t) que pasa por un segmento de circuito crea un campo magnético cambiante que induce una caída de voltaje entre los extremos del segmento. Este efecto puede ser muy grande en segmentos de circuitos dispuestos de cierta forma, como las bobinas. A estos dispositivos se les denomina inductores.

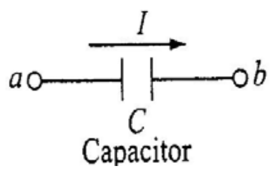
Ley de Faraday: La caída de voltaje V_{ab} a través de un inductor es proporcional a la tasa de cambio de la corriente:

$V_{ab} = L\frac{dI}{dt}$

La constante L se denomina la inductancia del inductor.
La inductancia se mide en henries (denotada por H) si el voltaje se mide en volts y dI/dt en amoperes por segundo.

CAPACITOR

Un capacitor consta de dos placas separadas por un aislante como el aire. Si las terminales a y b del capacitor se conectan



a una fuente de voltaje, se empezarán a acumular cargas de signo opuesto en las dos placas. Se habla de carga total $q(t)$ en el capacitor, y obsérvese que si $q(t_0)$ es la carga inicial, entonces

$$q(t) = q(t_0) + \int_{t_0}^{t} I(s)ds \qquad \text{para} \quad t \geq t_0$$

Un capacitor es como un depósito utilizado para almacenar agua y proveer una fuente de presión.
Ley de Coulomb. La caída de voltaje V_{ab} cuando la corriente fluye de a a b a través de un capacitor es proporcional a la carga en el capacitor:

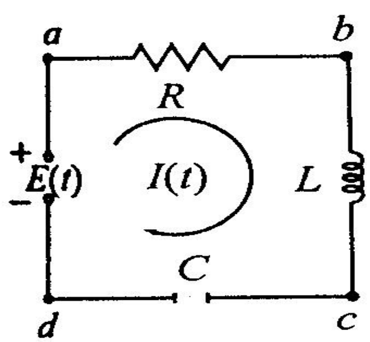
$$V_{ab}(t) = \frac{1}{C}q(t) = \frac{1}{C}\left[q(t_0) + \int_{t_0}^{t} I(s)ds\right]$$

La constante C recibe el nombre de capacitancia del capacitor.
La capacitancia se mide en farads (denotada por F) si la carga está en coulombs, el voltaje en volts y la corriente en amperes. Debido a que el coulomb es una cantidad muy grande de carga, un capacitor típico almacenará sólo una pequeña fracción de un coulomb a las tensiones típicas, por lo que C es, en general, muy pequeña, del orden de 10^{-5} o 10^{-6} F.

Leyes de Kirchhoff

Los circuitos eléctricos constan de uno o más ciclos cerrados, cada uno con resistores, inductores, capacitores y/o fuentes de voltaje. A fin de modelar la corriente que pasa por un circuito se necesita una fórmula que relacione la caída de voltaje a través de varios componentes de un circuito. Se ha observado que se cumple la siguiente ley de conservación para cada ciclo cerrado de un circuito.

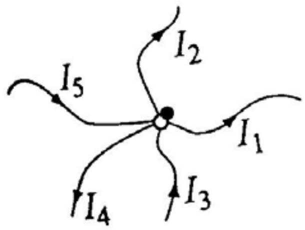
Ley de Kirchhoff para el voltaje: La suma (algebraica) de las caídas de voltaje a través de los elementos de un circuito eléctrico simple es igual al voltaje aplicado.



Por ejemplo, para el circuito RLC de la figura, si consideramos que la dirección positiva del flujo de corriente está dada por la sucesión de nodos abcda, se tiene

$V_{ab} + V_{bc} + V_{cd} + V_{da} = 0$ o bien $E(t) = V_{ab} + V_{bc} + V_{cd} + V_{da}$ puesto que $E(t) = -V_{da}$

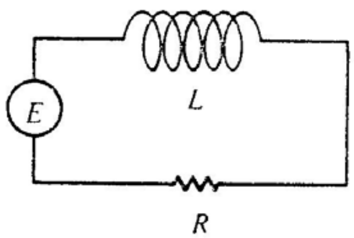
Ley de Kirchhoff para la corriente: En cada punto de un circuito la suma de las corrientes que fluyen hacia él es igual a la suma de las corrientes que salen.



Por ejemplo, en el esquema de la izquierda se tiene

$$I_3 + I_5 = I_1 + I_2 + I_4$$

Circuito eléctrico LR en serie

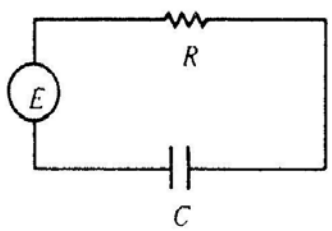


Se modela mediante la ecuación diferencial lineal para la corriente I(t)

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

A veces, a la corriente I(t) se la llama **respuesta** del sistema.

Circuito eléctrico RC en serie



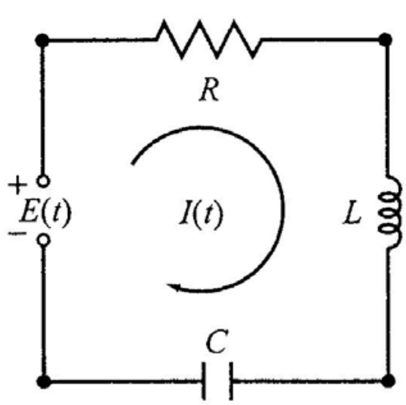
Se modela mediante la ecuación

$$RI + \frac{1}{C}q = E(t)$$

Pero la corriente I y la carga q están relacionadas por $I = \frac{dq}{dt}$ (1); por lo tanto la ecuación precedente se transforma en la ecuación diferencial lineal

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t)$$

Circuito eléctrico RLC en serie



La corriente y la carga de un circuito simple RLC como el de la figura satisfacen la ecuación básica de los circuitos

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}\left[q(t_0) + \int_{t_0}^{t} I(s)ds\right] = E(t)$$

Esta ecuación puede convertirse en una EDO de dos maneras:

Como $q = q(t_0) + \int_{t_0}^{t} I(s)ds$, entonces $q' = I$ y $q'' = I'$, lo que sustituido en la ecuación precedente arroja una ecuación diferencial lineal de segundo orden en términos de la carga q(t), bajo la suposición de que el voltaje E(t) se conoce.

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t)$$

En la mayoría de los problemas prácticos es la corriente I, más que la carga q, lo que tiene interés primario, de modo que, si E(t) es derivable, podemos derivar la EDO con respecto a t y obtener, puesto que $q' = I$

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = E'(t)$$

El PVI pertinente para $t_0 = 0$, correspondiente para la EDO de la corriente se deduce como sigue: si se conocen la carga inicial q_0 y la corriente inicial I_0, entonces se tiene

$$LI'(0) + RI_0 + \frac{1}{C}q_0 = E(0)$$

que determina de inmediato a $I'(0)$ en términos de I_0, q_0 y E(0). Así es necesario resolver el PVI

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E'(t)$$

sujeto a $\quad I(0) = I_0 \qquad I'(0) = \dfrac{E(0) - RI_0 - q_0/C}{L}$

Notemos que el modelo planteado tiene la misma forma que el correspondiente a la vibración mecánica forzada y amortiguada.

47)

a) En t= 0 una fem de 20 voltios se aplica a un circuito consistente de un inductor de 2 henrios en serie con una resistencia de 40 ohmios. Si la corriente es cero en t= 0, ¿Cuál es la corriente en cualquier tiempo $t \geq 0$?
b) Trabaje en el inciso a) si la fem es 100 sen10t voltios.

48)

a) Un condensador de 5×10^{-3} faradios está en serie con una resistencia de 25 ohmios y una fem de 50 voltios. El interruptor se cierra en t=0. Asumiendo que la carga en el condensador es cero en t=0, determinar la carga y la corriente en cualquier tiempo.
b) Trabajar el inciso a) si la fem es de 50 cos6t voltios.

49) Un circuito RL con una resistencia de 5Ω y un inductor de 0.05 H tiene una corriente de 1 A en t = 0, cuando se aplica una fuente de voltaje E(t) = 5 cos120t V. Determine la corriente y el voltaje subsecuentes en el inductor.

50) Un circuito RC con una resistencia de 1Ω y un condensador de 0.000001 F tiene un voltaje E(t) = sen100t V. Si el voltaje inicial en el condensador es nulo, determine el voltaje en la resistencia y la corriente subsecuentes.