ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

1) Demostrar que las funciones dadas son soluciones de las ecuaciones indicadas:

a) $y = (x-1)^2$ $\quad (x^2 - x)y'' - (2x-1)y' + 2y = 0$

b) $y = e^x + e^{-x} - x$ $\quad y'' - y = x$

c) $x = y + \ln y$ $\quad yy'' + (y')^3 - (y')^2 = 0$

d) $y(x) = C_1 e^x + C_2$ $\quad y'' - y' = 0$
Hallar la curva que pasa por $(0,1)$ y $(1,e)$. ¿Qué tipo de solución representa la ecuación de esta curva?

e) $y(x) = e^{2x}(C_1 + C_2 x)$ $\quad y'' - 4y' + 4y = 0$
Hallar la curva integral que pasa por $(0,0)$ y tiene pendiente igual a 1 en ese punto.

2) Encontrar la ecuación diferencial cuya solución general es:

a) $y = C_1 e^x + C_2\, x\, e^x$

b) $y = x^{-2}(C_1 + C_2 \ln x)$

3) Determinar, por inspección, al menos una solución de la ecuación diferencial:

a) $y'' = y$ $\quad$ b) $y'' = -y$ $\quad$ c) $y'' = y(y-3)$

4) Determinar si los siguientes conjuntos de funciones son linealmente dependientes o independientes para el intervalo indicado:

a) $\{e^{ax}, e^{bx}\}$ $\quad a \neq b$, $I = R$

b) $\{e^x, \cos x\ , \operatorname{sen} x\}$ $\quad I = R$

c) $\{\cos^2 x,\ \cos 2x + 1\}$ $\quad I = R$

d) $\{\ln x,\ x \ln x\}$ $\quad I = (0, \infty)$

e) $\{e^x,\ e^{-x},\ \operatorname{senh}\ x\}$ $\quad I = R$

5) De la siguientes funciones:

$$y_1 = \operatorname{sen} x, \quad y_2 = e^{-x}, \quad y_3 = e^{2x}, \quad y_4 = e^{2x} - e^{-x}$$

Cuáles son soluciones de la ecuación diferencial $y'' - y' - 2y = 0$. En caso de ser posible determinar una solución general.

6) En cada uno de los siguientes ejercicios, demostrar que las funciones dadas son soluciones de la ecuación diferencial. Escribir la solución general:

a) $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$ $\quad$ $\operatorname{sh}x$, $2e^{-x}$, $-\operatorname{ch}x$

b) $y'' + 4y = 0$ $\quad$ $\operatorname{sen}2x$, $-2\cos 2x$, $-\cos(2x-3)$

7)

a) Si el Wronskiano de f y g es $3e^{4x}$ y $f(x) = e^{2x}$. Hallar g(x).

b) Si $W[f,g](x) = x^2e^x$ y $f(x) = x$. Hallar g(x).

8) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas:

a) $y'' + 5y' + 6y = 0$

b) $y'' + 8y' + 16y = 0$

c) $z'' + z' - z = 0$

d) $4y'' - 4y' + y = 0$

e) $w'' + 2w' + 5w = 0$

f) $4y'' + 4y' + 6y = 0$

g) $z''' + z'' - 4z' + 2z = 0$

h) $y''' - y'' + 2y = 0$

i) $y'' + 2y' - 8y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -12$

j) $y'' + y' = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

k) $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y(\pi) = e^{\pi}$, $y'(\pi) = 0$

l) $y'' + 2y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -3$

m) $z'' - 2z' - 2z = 0$, $z(0) = 0$, $z'(0) = 3$

n) $y''' - y' = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$, $y''(0) = -1$

9) Resolver las siguientes ecuaciones diferencial es no homogéneas, aplicando el método más apropiado:

a) $y'' + 2y' + y = x^2 + 3x + 3$

b) $y'' + 9y = \operatorname{sen}3x$

c) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^5}$

d) $y'' - 6y' + 9y = e^x$

e) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$

f) $y'' - 3y' - 4y = 30e^x$

g) $y'' - 4y = e^{2x} + 2$

h) $y'' + 4y = 4\sec^2 2x$

i) $y''' + y'' = 6x$

j) $y'' - 3y' + 2y = (x-2)e^x$

k) $y'' - 4y' + 3y = 2e^{-x}$

l) $y'' + 4y = 8\,\mathrm{sen}x\cos x$

m) $y'' + y = \cos\mathrm{ec}x$

n) $y'' + y' + y = 1 - x^3$

o) $y'' + 5y' - 14y = 12\,e^{x}\cosh x$

p) $y'' - 2y' - 3y = e^{x}$, $y(0) = y'(0) = 0$

q) $y'' + 4y = 3\cos t$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$

r) $y'' + y' - 2y = 6\,e^{t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$

10)

a) Las raíces de un polinomio característico son $r_1 = 4$ y $r_2 = -5$. ¿Cuál es la ecuación diferencial homogénea correspondiente?

b) $y_1 = e^{-4x}\cos x$ es una solución de la ecuación diferencial $y''' + 6y'' + y' - 34y = 0$. ¿Cuál es la solución general de la ecuación diferencial?

11) Determinar una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes $ay'' + by' + cy = f(t)$ cuya solución general sea $y(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{-2t} + \mathrm{sen}\,t$.

12) Determinar las constantes a, b y c tales que : $y''' + ay'' + by' + cy = 0$ tenga como solución a la siguiente función:

$$y = C_1 e^{2x} + e^{3x}\left(C_2\,\mathrm{sen}x + C_3\cos x\right)$$

13)

a) Cuál es la solución general de una ecuación diferencial cuyo polinomio característico tiene las siguientes raíces: $-3,\ 1,\ 2,\ 2,\ 4-2i,\ 4+2i,\ 4-2i,\ 4+2i,\ 2$

b) Encontrar una ecuación diferencial cuyo polinomio característico tenga por raíces a: $-1+2i,\ 4,\ -1-2i,\ 4,\ -1$. Escriba la solución general de la misma.

14) Resolver el problema de valor inicial:

$$y'' + 2y' + 5y = g(x)\,,\quad y(0) = 0\,,\quad y'(0) = 0$$

donde $g(x) = \begin{cases} 10, & 0 \le x \le \dfrac{3\pi}{2} \\ 0, & x > \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Sistema Masa - Resorte

La ecuación diferencial $my''+\beta y'+ky=F(t)$ representa el movimiento unidimensional de una masa m que está sujeta a un resorte con constante k > 0 y a un amortiguador con constante $\beta \geq 0$, y sobre la cual también actúa una fuerza externa F(t).

Si $F=0$ tales oscilaciones son no forzadas.
Si $F=0$ y $\beta = 0$, tales oscilaciones son no forzadas y no amortiguadas.
Si $F=0$ y $\beta \neq 0$, oscilaciones no forzadas con amortiguamiento.

Si $F\neq 0$ y $\beta \neq 0$, oscilaciones forzadas con amortiguamiento.
Si $F\neq 0$ y $\beta = 0$, oscilaciones forzadas sin amortiguamiento.

15) Una masa de $0{,}5\,\text{slugs}$ está colocada en un resorte que tiene una constante de resorte $k = 2\frac{\text{Lb}}{\text{pie}}$. La masa se jala hacia abajo 1 pie y se suelta.
a) Formule y resuelva la ecuación diferencial de la función de desplazamiento de la masa.
b) Calcular amplitud, período y ángulo de fase.
c) Expresar la función de desplazamiento de la forma $A\text{sen}(wt+\phi)$. Graficar.

16) Una masa que pesa 4lb estira un resorte 3 pulgadas al llegar al reposo en equilibrio. Se tira luego de la masa a 6 pulgadas debajo del punto de equilibrio y se le aplica una velocidad de $\sqrt{2}$ pies/seg dirigida hacia abajo. Despreciando todas las fuerzas de amortiguación o externas que puedan estar presentes, determinar la ecuación de movimiento de la masa junto con su amplitud, período y frecuencia natural. ¿Cuánto tiempo transcurre desde que se suelta la masa hasta que pasa por la posición de equilibrio por primera vez?

17) Una masa que pesa 8 lb se sujeta a un resorte suspendido del techo. Cuando la masa queda en reposo en equilibrio, el resorte ha sido estirado 6 pulgadas. Luego se tira de la masa 3 pulgadas abajo del punto de equilibrio y se le aplica una velocidad dirigida hacia arriba de 0.5 pies/seg. Despreciando todas las fuerzas de amortiguación o externas que puedan estar presentes, determinar la ecuación de movimiento de la masa junto con su amplitud, período y frecuencia natural. Clasificar el movimiento y trazar una gráfica.

18) Un objeto que pesa 8 Lb queda suspendido de un resorte estirándolo 6 pulgadas. Una vez que la pesa queda en reposo en la posición de equilibrio es empujada hacia abajo a una velocidad de $4\frac{\text{pie}}{\text{seg}}$
a) Resuelva el problema de valor inicial describiendo el desplazamiento de la pesa.
b) Cuál es el período de las oscilaciones?. Graficar
c) Cuál es la velocidad de la pesa cuando se encuentra a 3 pulgadas arriba de la posición de equilibrio y cae?.
d) Exprese la solución del problema de la forma $A\cos(wt+\phi)$.

19) Un objeto de 16 kg de masa está sujeto al extremo de un resorte que hace que se alargue 49 cm. A continuación se lleva el objeto 20 cm por debajo de la posición de equilibrio y se lo abandona en esa posición con una velocidad de $1{,}2\frac{m}{seg}$ dirigida hacia arriba. No existen fuerzas exteriores pero el medio opone una resistencia al movimiento que numéricamente (en Newton) vale $\beta v = \beta y'(t)$, siendo v la velocidad expresada en $\left[\frac{m}{seg}\right]$. Estudiar el desplazamiento de la pesa en los siguientes casos:

a) $\beta = 64\frac{kg}{seg}$ b) $\beta = 64\sqrt{5}\frac{kg}{seg}$ c) $\beta = 144\frac{kg}{seg}$

20)

a) Una pesa de 32 lb estira 6 pulgadas un resorte. La pesa se mueve en un medio que desarrolla una fuerza de amortiguación igual a β veces la velocidad instantánea. Determinar los valores de β para los cuales el sistema desarrolla movimiento oscilatorio.

b) Un resorte de constante $k = 2\ lb/pie$ está suspendido en un líquido que representa una fuerza de amortiguación numéricamente igual a 4 veces la velocidad instantánea. Si se cuelga una masa m del resorte, determinar los valores de m para que el movimiento resultante sea no oscilatorio.

21) Una masa de 1 slugs se sujeta a un resorte cuya constante es 5 lb/pie. Inicialmente la masa se suelta desde un punto que está a 1 pie por encima de la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia abajo de 3 pie/seg y el movimiento se realiza en un medio donde la amortiguación es 2 veces la velocidad instantánea. Encontrar la ecuación del movimiento y describir qué tipo es.

22) Un cuerpo que pesa 12 lb está fijado tanto a un resorte suspendido verticalmente que se estira 6 pulgadas como a un amortiguador que proporciona una resistencia de 3 lb por pie por segundo de velocidad. Si el peso se empuja hacia abajo 1 pie de su posición de equilibrio estático y luego se suelta desde el reposo en el instante $t = 0$, encontrar la función de posición $x(t)$. Clasificar el movimiento. Encontrar, además, la frecuencia, la amplitud dependiente del tiempo y el ángulo de fase del movimiento.

23)

a) Estudiar el movimiento del cuerpo del problema 15) suponiendo que actúa sobre el cuerpo una fuerza exterior $16\cos\frac{1}{2}t$ (en newton).

b) Si la fuerza exterior del inciso a) se reemplaza por $8\cos wt$ de frecuencia w, encuentre el valor de w para que el sistema masa - resorte entre en resonancia.

24) Un objeto con masa de 1 kilogramo queda suspendido de un resorte que tiene una constante de resorte de 24 newtons/metro. Al objeto está unido un amortiguador de choques que induce una resistencia al avance de 11v newtons. El sistema es puesto en movimiento bajando la pesa 25/3 centímetros y luego impulsándola hacia arriba con la

fuerza suficiente para impartir una velocidad de 5 metros/segundo. Resolver, clasificar el movimiento y graficar la función de desplazamiento.

25) Al sujetar una masa de 1 slug a un resorte, éste se estira 2 pies y luego queda en reposo en la posición de equilibrio. A partir de $t = 0$, una fuerza exterior igual a $f(t) = 8 \operatorname{sen} 4t$ se aplica al sistema. Encuentre la ecuación del movimiento si el medio que lo rodea al sistema opone una fuerza de amortiguación numéricamente igual a 8 veces la velocidad instantánea.

Deflexión de una viga uniforme

La ecuación diferencial $E\,I\,\dfrac{d^4y}{dx^4} = w(x)$ representa la deflexión de una viga horizontal bajo la acción de una fuerza vertical. E, I son constantes y representan:

E: módulo de Young del material de la viga
I: momento de inercia de la sección transversal de la viga sobre una línea horizontal que pasa por el centro de gravedad de la sección transversal
w: carga en un plano vertical que contenga al eje de simetría

26) Una viga de longitud L, está empotrada en ambos extremos. Determinar la desviación de esa viga si sostiene una carga constante, w_0, uniformemente distribuida en su longitud; esto es: $w(x) = w_0$, $0 < x < L$.

27) En los siguientes problemas la viga tiene longitud L y w_0 es constante:

Resolver la ecuación diferencial $E\,I\,\dfrac{d^4y}{dx^4} = w(x)$ (1)

28)

a) Cuando la viga está empotrada en su extremo izquierdo y libre en el derecho y $w(x) = w_0$, $0 < x < L$. Trazar la elástica de la viga cuando $w_0 = 24$ E I y L = 1.

b) Cuando la viga sólo está apoyada en ambos extremos y $w(x) = w_0$, $0 < x < L$. Trazar la elástica de la viga cuando $w_0 = 24$ E I y L = 1.

c) Cuando la viga está empotrada en su extremo izquierdo y sólo apoyada en el derecho y $w(x) = w_0$, $0 < x < L$. Trazar la elástica de la viga cuando $w_0 = 48$ E I y L = 1.

29)

a) Determinar la desviación máxima de l viga en voladizo del problema 21-a).
b) ¿Cómo se compara la desviación máxima de una viga de la mitad de la longitud con el valor obtenido en a).

Circuito RLC en serie

En el estudio de un circuito eléctrico que está formado por una resistencia, un capacitor y un inductor en serie se aplica cierta fuerza electromotriz obteniéndose un problema con valores iniciales de la forma

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{q}{C}=E(t),\quad q(0)=q_{0,}\quad I(0)=I_0$$

Donde L es la inductancia en henrys, R es la resistencia en ohmns, C es la capacitancia en farads, E(t) es la fuerza electromotriz, q(t) la carga en culombs en el capacitor en el instante t e $I=\frac{dq}{dt}$ es la corriente en ampers

30) Un circuito RLC en serie tiene una fuerza electromotriz dada por $E(t)=\text{sen}\,100t$ voltios, un resistor de 0.02 ohmios, un inductor de 0.001 henrios y un capacitor de 2 faradios. Si la corriente inicial y la carga inicial del capacitor son cero, determinar la corriente del circuito para $t>0$

31) Los componentes de un circuito eléctrico de tipo LRC tienen los siguientes valores: $R=18\Omega$, $L=17H$ y $C=0.05F$
   a) Si cargamos el condensador y no introducimos fuerza electromotriz, ¿se descargará de forma oscilatoria?
   b) Introducimos una fuerza electromotriz $f(t)=60\,\text{sen}\,2t$ V. ¿Cuál será el régimen permanente (o estacionario) de la carga? ¿Está la intensidad de salida adelantada, en fase o retrasada con respecto al voltaje de entrada?