SISTEMAS LINEALES DE ECUACIONES DIFERENCIALES

1) Transformar la ecuación diferencial o el sistema dado en un sistema equivalente de ecuaciones diferenciales de primer orden:

a) $y''' - t\,y'' + y = t^2$

b) $t\,x'' - x' + x^2 = t\,e^t$

c) $x'' + 3\,x' + 7\,x = t^2$

d) $2y''' - 6y'' + 4y' + y = \operatorname{sen} t$

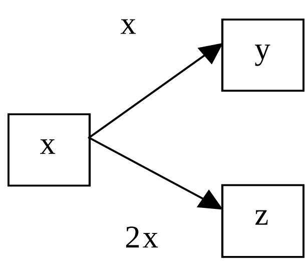
e) $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + \beta\dfrac{dx}{dt} + kx = F(t)$

f) $\begin{cases} x'' = x\,(1-y) \\ y'' = y\,(1-x) \end{cases}$

g) $\begin{cases} x'' + 2\,x' - 3\,y + x = 0 \\ y' + x' = e^t \end{cases}$

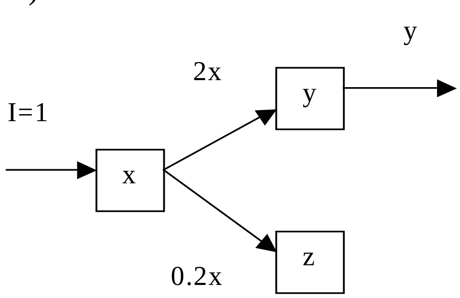
2) Escribir el sistema de PVI lineales de primer orden y modelar cada una de las cascadas lineales siguientes

a)



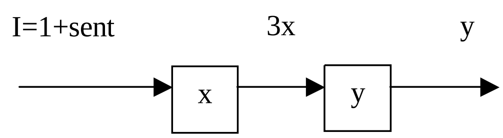
$x(0) = 1,\ y(0) = z(0) = 0$

b)



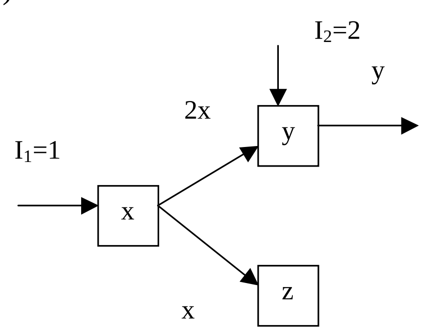
$x(0) = y(0) = z(0) = 0$

c)



$x(0) = y(0) = 0$

d)



$x(0) = y(0) = z(0) = 0$

3) En cada caso trace y etiquete el diagrama de cajas y flechas:

a) $x' = 5 - x, \qquad y' = x - 5y$

b) $x' = -x/2, \qquad y' = 1 - y/3, \qquad z' = x/2 + y/3$

c) $x' = -x, \qquad y' = x/2 - 3y, \qquad z' = x/2 + 3y - 2z$

4) Encontrar soluciones generales de los sistemas lineales dados utilizando el Método de Eliminación. Si se dan condiciones iniciales, hallar la solución que las satisface:

a) $\begin{cases} x' = -x + 3y \\ y' = 2y \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = x + 9y \\ y' = -2x - 5y \end{cases} \qquad \begin{matrix} x(0) = 3 \\ y(0) = 2 \end{matrix}$

c) $\begin{cases} x'' = 6x + 2y \\ y'' = 3x + 7y \end{cases}$

d) $\begin{cases} x'' = -4x + \operatorname{sen} t \\ y'' = 4x - 8y \end{cases}$

e) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \end{cases} \qquad \begin{matrix} x(0) = 2 \\ y(0) = 0 \end{matrix}$

f) $\begin{cases} y' = e^{x} - z \\ z' = e^{-x} + y \end{cases}$

5)

a) Transformar el siguiente sistema con condiciones iniciales, a una ecuación diferencial :

$$\begin{cases} x' = x - y + 2t \\ y' = x - y - t \end{cases} \quad , \quad x(0) = 3, y(0) = 0$$

b) Encuentre la solución general del sistema.

6) Escribir los siguientes sistema de ecuaciones diferenciales en la forma matricial:

$$X' = A(t)\, X + F(t)$$

a) $\begin{cases} x' = t\,x - y + e^{t} \\ y' = 2\,t\,y + x\,e^{t} - t^{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x'' + y' - x = t^{2} - y \\ y'' + x' + y = x + t \end{cases}$

c) $\begin{cases} x' = t\,x + e^{t}\,y + \cos t \\ y' = e^{-t}\,x + t^{2}\,y - \operatorname{sen} t \end{cases}$

d) $\begin{cases} x' = t\,x - y + e^{t} z \\ y' = 2\,x + t^{2}\,y - z \\ z' = e^{-t}\,x + 3\,t\,y + t^{3}\,z \end{cases}$

e) $\begin{cases} x'' + y' + x = y + \operatorname{sen} t \\ y'' + x' - y = 2t^{2} - x \end{cases} \quad , \qquad x(0) = 2,\ x'(0) = -1 \quad , \quad y(0) = -9,\ y'(0) = -7$

7)

a) Verificar que los vectores dados son soluciones de los sistema dados y demostrar que son linealmente independientes. Luego escribir una solución general del sistema:

i) $X' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} X;$ $\qquad X_1 = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 3e^{3t} \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 2e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$

ii) $X' = t^{-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} X, \qquad t>0 \qquad X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t, \qquad X_2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t^{-1}$

iii) $X' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} X, \qquad X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}$

b) Hallar la solución particular del primer sistema que satisface $x_1(0)=0$, $x_2(0)=5$

8) Aplicar el Método de los Valores Propios para hallar una general del sistema dado. Si se dan valores iniciales, hallar además la solución particular correspondiente:

a) $\begin{cases} x_1' = 3x_1 + 4x_2 & x_1(0)=1 \\ x_2' = 3x_1 + 2x_2 & x_2(0)=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 6x_3 \\ x_2' = 2x_1 - x_2 - 2x_3 \\ x_3' = 4x_1 - 2x_2 - 4x_3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1' = x_2 + x_3 \\ x_2' = x_1 + x_3 \\ x_3' = x_1 + x_2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x' = 12x - 5y \\ y' = 5x + 12y \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + x_3 & x_1(0)=0 \\ x_2' = 2x_1 + x_2 - x_3 & x_2(0)=1 \\ x_3' = -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 & x_3(0)=1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = 2x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_3' = x_2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x' = 2x - 9y \\ y' = x + 8y \end{cases}$

h) $\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 4x_2 \\ x_2' = x_1 + 2x_3 \\ x_3' = 2x_2 + 5x_3 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x_1' = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_2' = 2x_1 + 2x_3 \\ x_3' = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ x_2' = -2x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_3' = 2x_1 + 2x_2 + x_3 \end{cases}$

9) Aplicar el Método de los Coeficientes Indeterminados para encontrar una solución particular de cada uno de los siguiente sistemas. Si se dan condiciones iniciales obtenga una solución que la satisfaga:

a) $\begin{cases} x' = 6x + y - 11 & x(0)=0 \\ y' = 4x + 3y - 5 & y(0)=-6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = x + y - t - 1 \\ y' = 4x + y - 4t \end{cases}$

c) $\begin{cases} x' = 2x + 2t & x(0)=-1 \\ y' = 3x + 2y - t^2 & y(0)=1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x' = 4x + y + e^{t} & x(0)=1 \\ y' = -6x - y - e^{t} & y(0)=1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1' = x_2 + x_3 - 1 & x_1(0) = 0, \\ x_2' = x_1 + x_3 - 1 - e^t & x_2(0) = 0, \\ x_3' = x_1 + x_2 - 2e^t & x_3(0) = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x' = 2x + 2y - 4\cos t \\ y' = 2x + 2y - \text{sen} t \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 1 \\ x_2' = x_2 + 2x_3 \\ x_3' = 2x_2 + 4x_3 + 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x' = 4x + 2y \\ y' = 3x - y + e^{-2t} \end{cases}$

10) Aplicar el Método de Variación de los Parámetros para encontrar una solución particular de cada uno de los siguiente sistemas, luego expresar una solución general:

a) $X' = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2t \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $X' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} t^{-2} \\ t^{-3} \end{pmatrix} \quad t > 0$

c) $X' = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$

d) $X' = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 4\ln t \\ t^{-1} \end{pmatrix} \quad t > 0$

e) $X' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ 5t \end{pmatrix} \qquad X(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

11) Resolver los siguientes sistemas aplicando el método más conveniente:

a) $X' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -2t^2 + 1 \\ 4 + t \end{pmatrix} \qquad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $X' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 4e^{2t} \\ 4e^{4t} \end{pmatrix} \qquad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $X' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad X\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

12)

a) Un tanque A contiene 50 galones de agua en los cuales se disuelven 25 libras de sal y se conecta a un tanque B de 50 gal.. Se bombea líquido hacia y desde los tanques, en las proporciones indicadas en la figura. Deducir las ecuaciones diferenciales para $x_1(t)$ y $x_2(t)$ que den las libras de sal que hay en un instante cualquiera en los tanques A y B respectivamente.

b) Hallar el correspondiente sistema de ecuaciones diferenciales si al tanque A se bombea en lugar de agua pura, una solución de salmuera que contenga 2 lb de sal por galón.

13) Dos tanques bien mezclados de 100 L, están inicialmente llenos de agua pura. Agua con una concentración de sal de 30 g/L, entra al tanque A a una tasa de 4 L/min. El agua fluye del tanque A al tanque B a una tasa de 4L/min. El agua del tanque B se evapora a una tasa de 2 L/min y fluye hacia fuera a 2 L/min. Hallar la cantidad de sal en ambos tanques en cualquier tiempo t

14) Dos tanques están conectados por una serie de tuberías como se indica en la figura. El tanque 1 contiene inicialmente 100 galones de agua en los que están disueltas 40 libras de sal. El tanque 2 inicialmente contiene 150 galones de agua pura. Una solución de salmuera que contiene 0,2 libras de sal por galón se bombea en el tanque 1 a razón de 5 galones/minuto. Al mismo tiempo, una solución que también contiene 0,2 libras de sal por galón se bombea en el tanque 2 a razón de 10 galones/minuto. Las soluciones de salmuera se intercambian en los tanques y salen de ellos a las razones indicadas en la figura. Determinar la cantidad de sal en cada tanque en cualquier tiempo t.

15) Plantear los siguientes sistemas:

a) Tres tinas de fermentación de 100 galones están conectadas en la forma que indica la figura, manteniéndose uniformes las mezclas de los tanques mediante agitación. Denotar con $x_1(t)$ la cantidad (en libras) de alcohol en el tanque T_i en el instante t (i =1,2,3).
Suponer que la mezcla circula entre los tanques a una tasa de 10 gal/min.
Deducir las ecuaciones.

b) Formular un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden para las corrientes del circuito:

16) Encontrar un sistema de ecuaciones diferenciales y las condiciones iniciales para las corrientes de las redes dadas en los siguientes esquemas, suponiendo que todas las corrientes iniciales son cero. Determinar las corrientes en cada rama de la red.

a) b)

17) Resolver el circuito de la siguiente figura para el caso en que: $E(t) = 60\,V$, $C = 10^{-4}\,F$, $L = 1H$, $R = 50\,\Omega$ y siendo $i_1(0) = i_2(0) = 0$

18)
a)Plantear un sistema de ecuaciones diferenciales suponiendo que las corrientes iniciales son nulas y $R_1 = 8\Omega$, $R_2 = 3\Omega$, $L_1 = 1h$, $L_2 = 1h$, $E(t) = 100 sent\ V$.
b) Resolver el sistema utilizando el método de variación de parámetros.