ESTABILIDAD DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

1) Dado el sistema :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y \end{cases}$$

a) Encontrar sus soluciones
b) Encontrar sus trayectorias y graficarlas en el plano fase indicando la dirección del movimiento al crecer t.

2) Para los sistemas :

i) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x \\ \dfrac{dy}{dt} = -2y \end{cases}$ $\quad b_1)\ x(0) = 2\ ,\ y(0) = 0 \qquad b_2)\ x(0) = 3,\ y(0) = 1$

ii) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y \end{cases}$ $\quad b_1)\ x(0) = 4\ ,\ y(0) = 0 \qquad b_2)\ x(0) = 4\ ,\ y(0) = 2$

iii) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases}$ $\quad c_1)\ x(0) = 4\ ,\ y(0) = 0 \qquad c_2)\ x(0) = 0\ ,\ y(0) = 4$

b) Encontrar las soluciones que satisfagan las condiciones iniciales
c) Encontrar las trayectorias de las soluciones obtenidas y trazar sus gráficas en el plano fase. Identificar la dirección del movimiento al crecer t.

3) Analizar la naturaleza y la estabilidad del punto crítico (0,0) para cada uno de los sistemas dados. En cada caso, graficar las trayectorias en el plano fase.
(Sugerencia: usar un software matemático para visualizar mejor las trayectorias)

a) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -8y \\ \dfrac{dy}{dt} = 18x \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 2y \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - y \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x - 5y \end{cases}$

f) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 7y \end{cases}$

4) Dado el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + ay \end{cases}$$

Analizar la estabilidad del punto crítico (0,0) para los distintos valores de a.

5) Determinar el punto crítico (x_0, y_0) y clasificar su tipo y estabilidad, haciendo la transformación correspondiente. Encontrar la ecuación de la trayectoria.

a) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 3y + 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + y - 2 \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y + 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dy} = -x - y - 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y + 5 \end{cases}$

6) Encontrar los puntos críticos de los siguientes sistemas, clasificarlos e investigar el tipo de estabilidad de cada uno. Encontrar la ecuación de la trayectoria para algún punto crítico del sistema asociado.

a) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - xy \\ \dfrac{dy}{dt} = xy - 3y \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 - xy \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y^3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x^2 - y \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y^2 - 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = x^3 - y \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = x^2 - y \end{cases}$

f) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + x^2 + y^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = y - xy \end{cases}$

7) Dado el sistema :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = xy - 2 \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y \end{cases}$$

a) Encontrar todos los puntos críticos y analizar sus tipo y estabilidad
b) Realizar un esquema del retrato fase.

8) Sea el sistema :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \\ \dfrac{dy}{dt} = -2y + x^3 \end{cases}$$

a) Demostrar que el punto crítico (0,0) es un punto silla
b) Representar las trayectorias para el sistema lineal correspondiente
c) Determinar las trayectorias para el sistema no lineal y realizar un esquema de dichas trayectorias

9) Demostrar que los siguientes sistemas son casi-lineales con (0 , 0) como punto crítico, y clasificar este punto respecto a su tipo y estabilidad:

a) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 - e^x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 4\operatorname{sen} y \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = e^x + 2y - 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x + e^y - 1 \end{cases}$$

Sugerencia: Reemplazar las funciones exponenciales y trigonométricas por su aproximación en serie de Taylor alrededor del punto en cuestión.

10) Problema: ¨ Dos especies en competencia ¨
Supongamos que dos especies, liebres y ovejas, compiten por el mismo tipo de alimento (grama) y esta cantidad de alimento es limitada, ignorado otros factores como depredadores, factores climáticos, otras fuentes de alimento. Las ecuaciones diferenciales que modelan este fenómeno son las ecuaciones de Lokta-Volterra:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(3 - x - 2y) \\ \dfrac{dy}{dt} = y(2 - x - y) \end{cases}$$

donde

$x(t)$: población de liebres, $y(t)$: población de ovejas

Hallar los puntos críticos, definir que tipo de puntos críticos son y su estabilidad. Realizar un esquema del retrato fase.