TRANSFORMADA DE LAPLACE

1) Usando la definición, hallar la transformada de Laplace de las siguientes funciones y especificar los valores del parámetro s para los cuales están definidas dichas transformadas:

a) $f(t) = t^2$

b) $f(t) = \operatorname{sen} at$

c) $f(t) = \operatorname{senh} at$

d) $f(t) = \cosh at$

e) $f(t) = t\,e^{at}$

f) $f(t) = \begin{cases} 0, & t \le 1 \\ 2-t, & 1 < t \le 2 \\ t-2, & 2 < t \le 3 \\ 0, & t > 3 \end{cases}$

2) Calcular $L\{f(t)\}$ usando resultados conocidos y propiedades de la transformada de Laplace para las siguientes funciones :

a) $f(t) = 2t^3 - \frac{1}{2}e^{-t} + 2\operatorname{sen}2t + 3\cosh 4t$

b) $f(t) = 3t^4 + \operatorname{senh} t - e^{2t}$

c) $f(t) = \cos(\omega t + \theta)$; ω, θ constantes

d) $f(t) = \operatorname{senh}^2 2t$

e) $f(t) = \left(t^2 - e^{2t}\right)e^{-3t}$

f) $f(t) = e^{2t}\left(t + t^2\right)$

g) $f(t) = e^{2t}\left(\cos 2t - \operatorname{sen}2t\right)$

h) $f(t) = 2 + e^t \cos(\sqrt{5}\,t)$

i) $f(t) = \left(t - 1 + e^{2t}\right)^2$

3) Encontrar la transformada inversa de Laplace de cada una de las siguientes funciones:

a) $F(s) = \dfrac{2}{3s+6}$

b) $F(s) = \dfrac{2}{s^2+25}$

c) $F(s) = \dfrac{s}{s^2+3}$

d) $F(s) = \dfrac{1}{2}\dfrac{(s+1)^3}{s^5}$

e) $F(s) = \dfrac{2s-1}{s^2-9}$

f) $F(s) = \dfrac{s+6}{s^2+2}$

g) $F(s) = \dfrac{6s-4}{s^2-4s+20}$

h) $F(s) = \dfrac{4s+12}{s^2+8s+16}$

i) $F(s) = \dfrac{3s+7}{s^2-2s-3}$

j) $F(s) = \dfrac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}$

k) $F(s) = \dfrac{2s-1}{s^3 - s^2}$

l) $F(s) = \dfrac{s+5}{(s+1)(s^2-1)}$

4) Representar gráficamente y expresar en términos de la función escalón, cada una de las siguientes funciones:

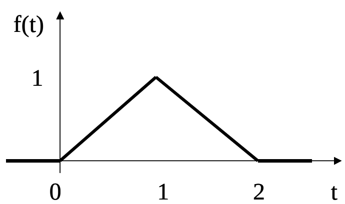
a) $f(t) = \begin{cases} 0 & t \le \pi \\ t-\pi & \pi \le t < 2\pi \\ 0 & 2\pi < t \end{cases}$

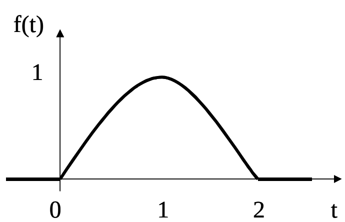
b) $f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \cos t & 0 < t < \pi \\ \operatorname{sen} t & t > \pi \end{cases}$

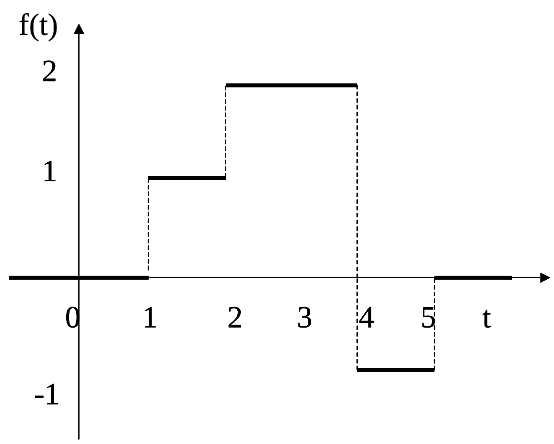
c) $f(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ t^2 - 2t + 2 & 1 < t \end{cases}$

d) $f(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ t^2 & 0 \le t < 2 \\ 4t & 2 < t \end{cases}$

5) Expresar en términos de pasos unitarios, las funciones que se muestran gráficamente:







6) Representar gráficamente las siguientes funciones:

a) $f(t) = t\, u(t-1)$

b) $f(t) = u(t-1) + 2\, u(t-3) - 6\, u(t-4)$

c) $f(t-1)\ \ u(t-2)$ si $f(t) = 2t$

7) Usando las propiedades de la transformada de Laplace, calcular $L\{f(t)\}$ para:

a) $g(t) = \begin{cases} 0, & t < 3 \\ t, & t \ge 3 \end{cases}$

b) $g(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ \operatorname{sen}(t-1), & t \ge 1 \end{cases}$

c) $g(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ t^2, & t > 2 \end{cases}$

d) $f(t) = 4(t-\pi)^2\, U(t-\pi)$

e) $f(t) = (t-1)^3 e^{t-1} U(t-1)$

f) $f(t) = e^{-(t-1)} \operatorname{sen}(t-1) U(t-1)$

g) $f(t) = (2t+1) U(t-1)$

h) $f(t) = \cos t \, U(t-\pi)$

i) $f(t) = t^2 e^{-3t} u(t-1)$

j) $f(t) = (t-2)\left[u(t-2) - u(t-3)\right]$

k) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 < t < 2 \\ 4-t, & 2 \le t \le 4 \\ 0, & t > 4 \end{cases}$

l) $f(t) = \operatorname{sen} t \, u(t-\pi)$

m) $f(t) = (t+1)^2 u(t-3)$

n) $f(t) = e^{-3t/2} u(t-3) \operatorname{sen}(2t-6)$

8) Calcular $L\{f(t)\}$ para las siguientes funciones:

a) $f(t) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 t}{t}$

b) $f(t) = (t^2 - 3t + 2) \operatorname{sen} t$

c) $f(t) = t^2 \operatorname{sen} t \, u(t-\pi)$

d) $f(t) = (t-1)^2 e^{-2t+2} \operatorname{senh}(t-1) u(t-1)$

e) $f(t) = \dfrac{\operatorname{sen} at}{t}$

f) $f(t) = \dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$

g) $f(t) = t \cosh t$

h) $f(t) = t^2 (3 \operatorname{sen} 2t - 2\cos 2t)$

i) $f(t) = \displaystyle\int_0^t (e^{-u} - \cos 2u) \, du$

j) $f(t) = (t-2)\cos(t-1) u(t-2)$

k) $f(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{1-e^u}{u} \, du$

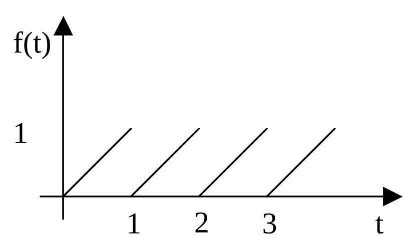
l) $f(t) = \displaystyle\int_0^t \cosh 3u \, du$

m) $f(t) = \displaystyle\int_0^t u \operatorname{sen} u \, du$

n) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & 1 < t \le 2 \end{cases}$

o) $f(t+2) = f(t), \quad \forall t > 0$

p)



9) Calcular $L^{-1}\{F(s)\}$ para:

a) $F(s) = \dfrac{s}{s^2+4} e^{-\pi s}$

b) $F(s) = \dfrac{s}{3-s^2} e^{-s}$

c) $F(s)=\dfrac{s\,e^{-3s}}{s^2+3s+2}$

d) $F(s)=\dfrac{2(s-1)}{s^2-2s+2}\,e^{-2s}$

e) $F(s)=\ln\dfrac{s-2}{s+2}$

f) $F(s)=\arctan(s+1)$

g) $F(s)=\ln\dfrac{s^2}{s^2-9}$

h) $F(s)=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{3}{s+2}$

i) $F(s)=e^{-2s}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2}{s}$

j) $F(s)=\dfrac{1}{(s+3)(s-1)}$

k) $F(s)=\dfrac{1}{s^3+5s}$

l) $F(s)=\dfrac{2}{s^2(s^2+1)}$

m) $F(s)=\dfrac{s}{(s+1)(s^2+1)}$

n) $F(s)=\dfrac{3s-2}{s(s^2-2s+1)}$

o) $F(s)=\dfrac{5s^2+s-2}{s^3-4s}$

p) $F(s)=\dfrac{3s-2}{4s^2+25}$

q) $F(s)=\dfrac{e^{-3s}}{s^2-2s+5}$

r) $F(s)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{s^2}{s^2+1}$

s) $F(s)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{s^2+1}{(s-1)^2}$

t) $F(s)=\dfrac{e^{-2s}}{s^2(s-3)}$

10)

a) Si $f(t)=3\cos t$; hallar $L\{f'(t)\}$ por dos métodos:

i) mediante derivación directa.

ii) aplicando la fórmula de la transformada de Laplace de la derivada primera.

b) Demostrar que $L\{\operatorname{sen} at\}=\dfrac{a}{s^2+a^2}$ usando la fórmula de la transformada de Laplace de la derivada segunda.

11) Dada la función $f(t)=\begin{cases}0\,, & 0\le t\le 2\\ 2t-6\,, & t>2\end{cases}$, calcular $L\{f'(t)\}$.

¿ Es válido el resultado $L\{f'(t)\}=s\,L\{f(t)\}-f(0)$? Explique.

12) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales aplicando transformada de Laplace:

a) $y''+2y'+5y=e^{-t}\operatorname{sen} t$ con $y(0)=0,\quad y'(0)=1$

b) $y'' + 4y = h(t)$ con $h(t) = \begin{cases} 0\,, & 0 \le t < \pi, t > 2\pi \\ 1\,, & \pi \le t < 2\pi \end{cases}$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

c) $y'' + 4y = \operatorname{sen} t - U(t - 2\pi)\operatorname{sen}(t - 2\pi)$ con $y(0) = y'(0) = 0$

d) $x'' + 4x' + 4x = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ e^{-(t-2)}\,, & t > 2 \end{cases}$ con $x(0) = 1, \quad x'(0)) = -1$

e) $y''' - \int_0^t y(u)du = 1$ $y(0) = y'(0) = 0 \quad ; \quad y''(0) = 1$

f) $y'(t) + 5\int_0^t \cos 2(t - u)y(u)du = 10$ con $y(0) = 2$

g) $y'(t) = \int_0^t y(u)\cos(t - u)du$ con $y(0) = 1$

h) $y'' + y = \delta(t - 2\pi)$ con $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

i) $t\, y'' + (1 - 2t)y' - 2y = 0$ $y(0) = 1 \quad ; \quad y'(0) = 2$

j) $x''' - x' = 3\, U(t - 3) - 2\, \delta(t - 2)$ $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$

k) $ty'' + (t - 1)y' - y = 0$ con $y(0) = 5; \quad y'(0) = -5$

13) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:

a) $\begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = y - 2x \end{cases}$ $x(0) = 8 \quad ; \quad y(0) = 3$

b) $\begin{cases} y' + 2z' = t \\ y'' - z = e^{-t} \end{cases}$ $y(0) = 3 \;;\; y'(0) = -2 \;;\; z(0) = 0$

c) $\begin{cases} x' = 4x - 2y + 2U(t - 1) \\ y' = 3x - y + U(t - 1) \end{cases}$ $x(0) = 0$, $y(0) = \dfrac{1}{2}$

d) $\begin{cases} x'' - y' = t \\ x' - y' = 1 \end{cases}$, $x(0) = x'(0) = y(0) = 0$

e) $\begin{cases} x' = y + \operatorname{sen} t \\ y' = -x + \cos t \end{cases}$, $x(0) = 1 \quad ; \quad y(0) = 0$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

14) Resolver los siguientes problemas, utilizando la transformada de Laplace:

a) La corriente I(t) de un circuito RLC en serie está regida por el problema de valor inicial:

$$I''(t)+4I(t)=g(t) \quad , \qquad I(0)=1 \quad ; \quad I'(0)=3$$

donde
$$g(t)=\begin{cases} 3\,\mathrm{sen}\,t & 0\le t\le 2\pi \\ 0 & 2\pi<t \end{cases}$$

Determinar la corriente en función del tiempo t.

b) Una masa sujeta a un resorte se suelta a partir del reposo 1 m por debajo de la posición de equilibrio del sistema masa-resorte, y empieza a vibrar. Después de π segundos la masa es golpeada por un martillo que ejerce un impulso sobre la masa. El sistema está regido por el problema de valor inicial

$$x''+9x=3\delta(t-\pi) \quad , \qquad x(0)=1 \quad ; \quad x'(0)=0$$

donde $x(t)$ denota el desplazamiento a partir del equilibrio en el instante t. Determinar $x(t)$.

c) Plantear y resolver una ecuación integro-diferencial en corriente para un circuito simple RLC sabiendo que la corriente inicial es nula , $L=0.1\mathrm{h}$, $R=3\Omega$, $C=0.05\mathrm{f}$ y

$$E(t)=\begin{cases} 0, & 0<t<2 \\ 50, & 2<t<4 \\ 0, & t>4 \end{cases}$$

d) Plantear un sistema de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales para las corrientes del circuito dado en el gráfico, suponiendo que las corrientes iniciales son todas cero. Determinar las corrientes en cada rama de la red.

e) Dos grandes tanques, cada uno con 50L de líquido, se encuentran interconectados por un tubo. El líquido fluye del tanque A hacia el tanque B a razón de 5L/min. El líquido contenido en el interior de cada tanque se mantiene bien agitado. Una salmuera con concentración de 3 Kg/L de sal fluye hacia el tanque A a razón de 5L/min. La solución fluye hacia fuera del sistema saliendo del tanque B a razón de 5L/min. Si el tanque A contiene inicialmente 50 Kg de sal y el tanque B contiene 100 Kg . determinar la cantidad de sal contenida en cada tanque en el instante $t\ge 0$.