SERIES DE FOURIER

1)

a) Demostrar que el sistema $\left\{1, \cos\frac{n\pi x}{L}, \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\right\}$, n = 1,2,3,4,….. , m = 1,2,3, …. es ortogonal en [-L , L] y en [0 , 2L]. Encontrar su norma.

b) Demostrar que el conjunto de funciones complejas $\left\{e^{inx}\right\}$, n = 0, ±1, ±2,…, es ortogonal en $[-\pi, \pi]$ Es ortonormal ?

2) Demostrar que las funciones dadas son ortogonales en el intervalo indicado:

a) $f_1(x) = x\ ,\quad f_2(x) = x^2\ ,\quad -2 \le x \le 2$

b) $f_1(x) = e^x\ ,\quad f_2(x) = x\,e^{-x} - e^{-x}\ ,\quad 0 \le x \le 2$

c) Por el inciso a) sabemos que f_1 y f_2 son ortogonales en $-2 \le x \le 2$. Hallar las constantes c_1 y c_2 tales que $f_3(x) = x + c_1x^2 + c_2x^3$ sea ortogonal a f_1 y a f_2 en el mismo intervalo.

3) Hallar la mejor aproximación de la forma $a + bx$ de la función $f(x) = \operatorname{sen}\pi x$ en el intervalo [-1 , 1].

4) Para cada una de las siguientes funciones encontrar su correspondiente serie trigonométrica de Fourier y determinar el valor al que converge dicha serie en los puntos de discontinuidad de la función:

a) $f(x) = \begin{cases} -1\ , & -\pi < x < 0 \\ 2\ , & 0 \le x < \pi \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi \\ 0, & \pi < x < 2\pi \end{cases}$

c) $f(x) = e^x\ ,\quad -\pi < x < \pi$

d) $f(x) = |x|\ ,\quad \frac{-1}{2} < x < \frac{1}{2}$

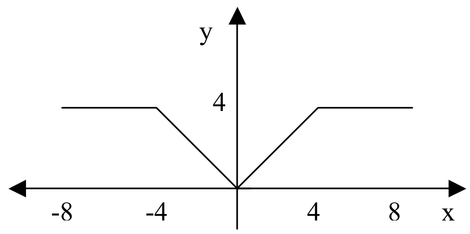
e) $f(x) = x\ ,\quad -1 < x < 1$

f) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}x\ , & 0 < x \le \pi \\ 0, & \pi < x < 2\pi \end{cases}$

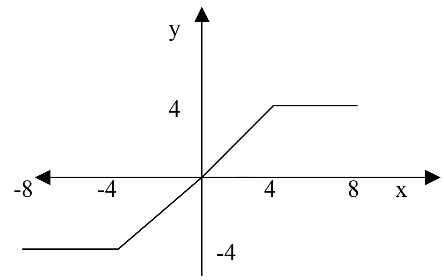
g) $f(x) = \begin{cases} 1\ , & -1 < x < 1 \\ 0\ , & 1 < x < 3 \end{cases}$

5) Determinar la serie de Fourier de cada una de las funciones cuyas gráficas se muestran a continuación:

a)



b)



6) Expresar las siguientes funciones en una serie de Fourier de cosenos y bosquejar la gráfica de la extensión de f a la cual la serie converge:

a) $f(x) = x - 1\,, \quad 0 < x < 1$

b) $f(x) = \begin{cases} 0\,, & 0 < x \le 1 \\ 1\,, & 1 < x < 2 \\ 0\,, & 2 \le x < 3 \end{cases}$

7) Expresar las siguientes funciones en una serie de Fourier de senos y bosquejar la gráfica de la extensión de f a la cual la serie converge:

a) $f(x) = 1\,, \quad 0 < x < \pi$

b) $f(x) = 1 - x\,, \quad 0 \le x \le 5$

8) A partir de la serie obtenida para la función del ejercicio 6) a) calcular el valor de la suma

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + ...$$

9) A partir de la serie obtenida para la función del ejercicio 7) a) calcular el valor de la suma

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - ......$$

10) Encontrar la serie de Fourier de la función f en el intervalo indicado:

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & -\pi < x < 0 \\ x^2\,, & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

A partir de la serie obtenida demostrar:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

b) $\displaystyle\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + ...$