ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES

ECUACION DEL CALOR

1) Resolver los siguientes problemas con valores en la frontera:

a)
$$\frac{\partial u}{\partial t} - 5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, \quad 0 < x < 1\,, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

$$u(x,0) = x^2(1-x)\,, \quad 0 < x < 1$$

b)
$$\frac{\partial u}{\partial t} = 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad 0 < x < 5\,, \quad t > 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(5,t) = 0$$

$$u(x,0) = x\,, \quad 0 < x < 5$$

c)
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4\frac{\partial u}{\partial t}\,, \quad 0 < x < 2\,, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = u(2,t) = 0$$

$$u(x,0) = 2\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi x}{2} - \mathrm{sen}\pi x + 4\mathrm{sen}2\pi x\,, \quad 0 < x < 2$$

2) Los extremos de una barra de cobre delgada de longitud 2m están puestos a $0^\circ C$. Encontrar la temperatura U(x,t) de la barra si inicialmente se cumple:

$$U(x,0) = \begin{cases} x\,, & 0 \le x \le 1 \\ -x+2\,, & 1 < x \le 2 \end{cases} \qquad \text{con} \;\; k = 1.15\,\frac{cm^2}{seg}$$

3) Una varilla de cobre de 50 cm de longitud, con su superficie lateral aislada, tiene una temperatura inicial U(x,0)=2x y en el instante t = 0 sus dos extremos están aislados:
   a) Encontrar U(x,t)
   b) ¿Cuál será su temperatura en el punto x = 10 cm después de 1 minuto?
   c) Al cabo de cuánto tiempo la temperatura en el punto x = 10 cm será aproximadamente $45^\circ C$.
   d) Analizar el problema cuando t tiende a infinito.

4) Plantear el problema con valores en la frontera que determine la temperatura en una barra de cobre de un metro de largo, si toda la barra está originalmente a $20^{\circ}C$ y entonces uno de los extremos se calienta repentinamente a $60^{\circ}C$ y se conserva a esa temperatura, mientras el otro extremo se mantiene a $20^{\circ}C$.

5) Plantear el problema con valores en la frontera que determine la temperatura de una varilla de plata de 2m de largo, si los extremos se mantienen a $30^{\circ}C$ y $50^{\circ}C$, respectivamente.
Suponga que la temperatura inicial en la barra está dada por una función cuadrática de la posición a lo largo de la barra, consistente con las anteriores condiciones en la frontera y con la condición de que la temperatura en el centro de la varilla es de $60^{\circ}C$.

ECUACION DE ONDA

6) Encontrar el desplazamiento y(x,t) de una cuerda elástica que está fija en sus extremos y se pone en movimiento punteándola en su centro; y(x,t) satisface las ecuaciones:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0$$

$$y(0,t) = y(2,t) = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 2$$

$$y(x,0) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{2-x}{2}, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

7) Una cuerda de 10 pies (1pie = 0.32cm) de largo es alzada por la mitad a una altura de 1 pie, para ser liberada inmediatamente después. Describir el movimiento oscilatorio de la cuerda. $a^2 = 1$

8) Resolver:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - y = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$y(0,t) = y(1,t) = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1$$

$$y(x,0) = x(x-1), \quad 0 \le x \le 1$$

ECUACION DE LAPLACE

9) Resolver:

a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\,,\quad 0<x<1\,,\quad 0<y<1$

$u(0,y)=u(1,y)=0\,,\quad 0\le y\le 1$

$u(x,1)=0\,,\quad 0\le x\le 1$

$u(x,0)=\operatorname{sen}2\pi x\,,\quad 0\le x\le 1$

b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\,,\quad 0<x<\pi\,,\quad 0<y<\pi$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y)=\dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,y)=0\,,\quad 0\le y\le \pi$

$u(x,\pi)=0\,,\quad 0\le x\le \pi$

$u(x,0)=\cos x-2\cos 4x\,,\quad 0\le x\le \pi$

c)

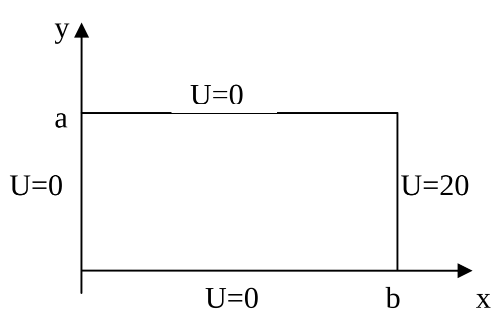
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\,,\quad 0<x<2\,,\quad 0<y<2$

$u(x,0)=u(x,2)=0\,,\quad 0\le x\le 2$

$u(2,y)=0\,,\quad 0\le y\le 2$

$$u(0,y)=\begin{cases}1\,, & 0\le y\le 1\\ -y+2\,, & 1\le y\le 2\end{cases}$$

d) Determinar la temperatura en estado de equilibrio de la siguiente placa rectangular:



PROBLEMAS DE CONTORNO: Onda – Calor – Laplace

10) Resolver los siguientes problemas de contorno:

a) $k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $\quad 0 < x < \pi \quad ; \quad t > 0 \qquad (k = 1.14)$

$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad t > 0$

$u(x,0) = f(x), \qquad 0 < x < \pi$

i) $f(x) = \begin{cases} 3 & 0 < x < \pi/2 \\ 0 & \pi/2 < x < \pi \end{cases}$ $\qquad$ ii) $f(x) = 3\operatorname{sen}x - 2\operatorname{sen}5x$

b) $a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\quad 0 < x < \pi \quad ; \quad t > 0 \qquad (a^2 = 1)$

$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad t \geq 0$

$u(x,0) = 0 \;, \qquad 0 < x < \pi$

$\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \pi x, \qquad 0 < x < \pi$

c) $a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\quad 0 < x < \pi \quad ; \quad t > 0 \qquad (a^2 = 1)$

$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad t \geq 0$

$u(x,0) = 0, \qquad 0 < x < \pi$

$\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \operatorname{sen}x + 5\operatorname{sen}3x, \qquad 0 < x < \pi$

d) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $\quad 0 < x < 1 \quad ; \quad 0 < y < 1$

$u(0,y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1$

$\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,1) = 0, \qquad 0 \leq x \leq 1$

$u(1,y) = 1 - y, \quad 0 \leq y \leq 1$

e) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0$

$u(x,0) = \operatorname{sen}x, \quad 0 < x < \pi$

11) Una varilla de longitud 2 coincide con el eje x en el intervalo $[0,2]$. Hallar la temperatura $u(x,t)$ sabiendo que el extremo izquierdo se mantiene a temperatura 0ºC y el derecho está aislado. La temperatura inicial en toda la varilla es $f(x)=\begin{cases} x & 0<x<1 \\ 0 & 1<x<2 \end{cases}$.

12) Una cuerda de longitud 3 coincide con el eje x en el intervalo $[0,3]$. Hallar el desplazamiento $u(x,t)$ en los siguientes casos:
   a) Los extremos están fijos en el eje x, la cuerda parte del reposo desde el desplazamiento inicial $x(3-x)$.
   b) Los extremos están fijos en el eje x, inicialmente la cuerda no está desplazada pero su velocidad inicial es $\operatorname{sen}(\pi x/3)$

13) Determinar la distribución de temperatura de una placa rectangular delgada cuyos lados coinciden con los de la región definida por $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 2$. El lado izquierdo y la cara inferior de la placa están aislados, la cara superior se mantiene a una temperatura de 0ºC y el lado derecho a $(1-\cos \pi y)^{\circ}C$.

14) Los extremos de una barra delgada de cobre de longitud 2 m están aislados, de forma que no permiten flujo de calor a través de ella.
   a) Encontrar la temperatura de la barra $u(x,t)$ si inicialmente se cumple

$$u(x,0) = 2 + \cos\frac{3\pi x}{2} \quad , \quad (k^2 = 1.15 \ cm^2/s)$$

   ¿Cuál es el valor de la temperatura a 1.5 m de la barra cuando han transcurrido 15s?